

Devoir surveillé numéro 4

Devoir du 2 mars 2024.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

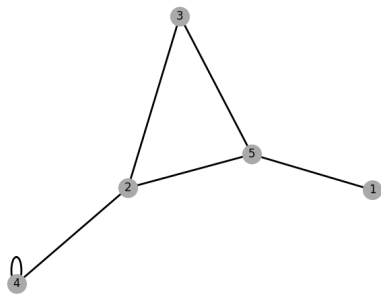
Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Proche du cours.*

1. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0) \iff (\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 0 \text{ et } f(-k) = 0).$$

2. Définir la notion de système complet d'événement d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
3. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales sans conditionnement.
4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et l un réel. Définir : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$.
5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
6. Énoncer et démontrer la proposition donnant une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour une matrice diagonale, ainsi que l'expression de son inverse le cas échéant.
7. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices carrées.
8. On considère le graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ représenté ci-dessous.



- (a) Donner les ensembles S et A .
- (b) Déterminer une matrice d'adjacence M de $\mathcal{G}$.
- (c) Quel est le degré du sommet 5? du sommet 4?
- (d) Justifier, à l'aide d'une chaîne bien choisie, que $\mathcal{G}$ est connexe.

9. Que renvoie la fonction Python `Mystere` suivante, prenant en entrée une liste L de nombres?

```
import numpy as np
def Mystere(L):
    for truc in L:
        if truc < 0:
            return(False)
    G=[np.sqrt(x) for x in L]
    return(G)
```

10. Écrire une fonction Python d'entête `def rechercheMax(L):` prenant en entrée une liste de nombres L non vide, et renvoyant en sortie son plus grand élément.

Exercice 2 Analyse

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie I : Étude de f

1. Écrire une fonction python prenant en entrée un réel $x > -1$ et renvoyant la valeur de $f(x)$.
2. Écrire un code python permettant de tracer le graphe de f entre $-0,5$ et $0,5$.
3. Montrer que f est continue sur son domaine de définition $] -1, +\infty[$.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en -1 et donner la valeur attribuée à $f(-1)$. **Dans la suite, on notera toujours f ce prolongement par continuité.**
5. Étudier la limite de f en $+\infty$.
6. Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.
 - (a) Justifier que g est bien définie et dérivable sur $] -1, +\infty[$.
 - (b) Déterminer le signe de g' sur $] -1, +\infty[$.
 - (c) Justifier que, pour tout $x \in] -1, +\infty[$ non nul, $g(x) > 0$.
7. Justifier que f est strictement croissante sur chaque intervalle $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$.
8. On admet le résultat suivant :

Soit h une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et strictement croissante sur $]a, b[$. Alors, h est strictement croissante sur $[a, b]$.

En déduire que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

9. La fonction f admet-elle une asymptote en $+\infty$?

Partie II : Étude d'une suite implicite

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ d'inconnue réelle $x \in [-1, +\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera u_n dans la suite de l'exercice.
11. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n \leq 0$.
12. Déterminer u_1 .
13. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone.
14. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
15. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 *Un petit problème de matrices*

Pour tout réel a , on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Déterminer $M(0)$ et $M(1/2)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $M(a)$ en fonction des matrices I_2 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et calculer J^2 .
- En déduire que pour tous réels a et b , $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.
- En déduire que si $a \neq \frac{1}{2}$, alors $M(a)$ est inversible, et qu'il existe un réel b tel que $(M(a))^{-1} = M(b)$. On exprimera un tel réel b en fonction de a .
- $M(\frac{1}{2})$ est-elle inversible?
- Montrer qu'il existe un unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.
 - Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$. On exprimera α en fonction de a .
 - Calculer P^2 , PQ , QP et Q^2 .
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $(M(a))^n$ en fonction de P , Q , α et n .
 - Déterminer P^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Expliciter $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La formule obtenue est-elle valable pour $n = -1$ si $a \neq \frac{1}{2}$?

Exercice 4 *Un algorithme glouton*

On dispose d'une liste L de nombres assez grande, et on souhaite :

- choisir 5 éléments de L dont la somme est maximale,
- sous la contrainte de ne jamais choisir deux nombres voisins.

Par exemple, si $L = [5, 4, 16, 3, 4, 15, 9, 12, 14, 19, 18, 1, 23, 2]$, alors le choix des nombres en gras $[5, 4, \mathbf{16}, 3, 4, \mathbf{15}, 9, \mathbf{12}, 14, 19, \mathbf{18}, 1, \mathbf{23}, 2]$ est une proposition acceptable de somme 84 (pas forcément maximale), alors que le choix $[5, 4, \mathbf{16}, 3, 4, 15, 9, \mathbf{12}, 14, \mathbf{19}, \mathbf{18}, 1, \mathbf{23}, 2]$ ne satisfait pas la contrainte demandée.

Toutes les liste considérées dans cet exercice sont de longueur assez grande pour qu'il soit possible de faire un tel choix.

- Proposer une stratégie gloutonne simple permettant de proposer une solution au problème posé. L'appliquer sur la liste L donnée en exemple ci-dessus. On appliquera le principe suivant : pour maximiser une somme, on cherche à maximiser chacun de ses termes.
 - Montrer que la solution proposée par cet algorithme glouton n'est pas forcément optimale.
- On souhaite maintenant écrire un programme python mettant en œuvre cette stratégie gloutonne.
 - Écrire une fonction d'entête `def contrainte(G,i):` prenant en entrée une liste G d'entiers et un entier i et renvoyant `False` si i , $i-1$ ou $i+1$ est un élément de G , et `True` sinon.
 - Que fait la fonction `Mystere` ci-dessous, prenant en entrée une liste L de nombres et une liste G d'entiers?

```
def Mystere(L,G):
    #Initialisation
    s=0
    while not(contrainte(G,s)):
        s+=1
    #fin initialisation
    for i in range(len(L)):
        if L[i]>L[s] and contrainte(G,i):
            s=i
    return(s)
```

- Écrire une fonction d'entête `def ChoixGlouton(L):` prenant en entrée une liste L de nombres (assez grande) et renvoyant en sortie le couple $(Sol, Somme)$ formé de la liste `Sol` des indices des nombres gardés par la stratégie gloutonne proposée en question 1, ainsi que la somme `Somme` obtenue avec ce choix de nombres.

Exercice 5 Problème : matrices et probabilités

Les deux parties de ce problème sont liées.

Partie I : Calcul matriciel

On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer PQ .
(b) En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1} .
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $M - \lambda I_3$ est-elle inversible?
3. On pose $D = P^{-1}MP$.
(a) Calculer D .
(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $j \geq 1$, on a $M^j = PD^jP^{-1}$. Cette relation est-elle toujours valable pour $j = 0$?
4. Expliciter la matrice M^j pour tout entier naturel j non nul. Vérifier que sa première colonne est bien donnée par :

$$C_j = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\frac{2}{3})^j + 2(-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j \end{pmatrix}.$$

5. L'expression de la première colonne C_j de M^j obtenue à la question précédente est-elle toujours valable pour $j = 0$?

Partie II : Étude d'une expérience aléatoire

Une urne contient trois boules indiscernables numérotées 1, 2 et 3. Dans le processus suivant, les tirages dans cette urne se font au hasard et avec remise.

On procède à l'expérience aléatoire suivante, constituée d'une infinité de tirages dans cette urne, et dont le résultat est décrit ci dessous.

- On procède au premier tirage dans cette urne. On note le numéro de la boule tirée. Ce numéro est appelé notre premier **résultat**.
- On procède aux tirages suivants. Soit $k \geq 2$ un entier. Lors du k -ième tirage, on tire une boule dans cette urne.
 - Si le $(k-1)$ -ième **résultat** était 1, alors on note le numéro de la boule tirée comme k -ième résultat.
 - Sinon, notons $j \neq 1$ le $(k-1)$ -ième résultat. Le k -ième résultat noté est alors j si l'on a tiré la boule j au k -ième tirage, et 1 sinon.

On admet l'existence d'un espace probabilisé (non fini, ce que l'on ignorera) modélisant cette expérience aléatoire, et on note $\mathbb{P}$ sa probabilité.

Enfin, on considère les événements $R_k(i)$: " le k -ième résultat est l'entier i ", pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

6. Déterminer la probabilité des événements $R_1(i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
7. Soit $k \geq 1$ un entier.
 - (a) Montrer par récurrence que les événements $R_n(1)$, $R_n(2)$ et $R_n(3)$ sont de probabilité non nulle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (b) Montrer que $\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(1)) = \frac{2}{3}$.
 - (c) Déterminer de même les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{R_k(i)}(R_{k+1}(j))$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.
8. On pose, pour tout entier $k \geq 1$, $U_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(R_k(1)) \\ \mathbb{P}(R_k(2)) \\ \mathbb{P}(R_k(3)) \end{pmatrix}$.
 - (a) Exprimer U_{k+1} en fonction de $\mathbb{P}(R_k(1))$, $\mathbb{P}(R_k(2))$ et $\mathbb{P}(R_k(3))$.

(b) En déduire la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \geq 1, U_{k+1} = AU_k.$$

(c) On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k U_0.$$

9. Exprimer A en fonction de M et I_3 . En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j.$$

10. En déduire la première colonne $D_k \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de A^k pour tout entier naturel k .

11. En déduire, en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$, les probabilités $\mathbb{P}(R_k(1))$, $\mathbb{P}(R_k(2))$ et $\mathbb{P}(R_k(3))$.

12. Déterminer la limite de ces probabilités quand k tend vers $+\infty$, et interpréter le résultat.

— *Fin de l'énoncé* —