Corrigé du DS n°4.

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrons $(P : \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0) \Leftrightarrow (Q : \forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 0 \text{ et } f(-k) = 0)$.

On procède par double implication.

(i) Montrons $P \Rightarrow Q$. Supposons P, montrons Q.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$k \in \mathbb{Z}$, donc d'après P : $f(k) = 0$.

$-k \in \mathbb{Z}$ donc d'après P : $f(-k) = 0$.

On a donc bien : $\underline{f(k) = 0 \text{ et } f(-k) = 0, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ d'où } Q}$.

(ii) Supposons Q, montrons P.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrons $f(n) = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}$, alors d'après Q, $f(n) = 0$ et $f(-n) = 0$. Donc $f(n) = 0$.

Sinon, $n < 0$ donc $-n \in \mathbb{Z}$. D'après Q, $f(-n) = 0$ et $f(-(-n)) = 0$. Donc $f(n) = 0$.

Dans tous les cas, $f(n) = 0$. On a donc bien montré

$$\underline{P : \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0.}$$

Par double implication, $\boxed{\text{on a bien démontré } P \Leftrightarrow Q.}$

2., 3., 4., 5., 6., 7., voir cours.

8. (a) Le graphe $\mathcal{G}$ est donné par $\mathcal{G} = (S, A)$ où :

$$\boxed{\begin{array}{l} S = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A = \{\{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4\}\}. \end{array}}$$

(b) Avec la numérotation induite par les sommets entiers de $\mathcal{G}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) 5 est adjacent aux sommets 1, 2 et 3 : il est de degré 3.

4 est adjacent au sommet 2 et à lui-même : il est de degré 3.

(d) La chaîne 1-5-3-2-4 passe par tous les sommets de $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ est donc connexe.

9. La fonction Mystere appliquée en L renvoie :

- False si L contient un nombre strictement négatif,
- La liste des racines carrées des éléments de L sinon.

10.

```
def rechercheMax(L):
    max = 0
    for e in L:
        if e > max:
            max = e
    return(max)
```

(2)

Exercice 2.

1.
```python
import numpy as np
def f(x):
    if x==0:
        return(1)
    else:
        return(x/np.log(1+x))
```

2. À la suite du code précédent :
```python
import matplotlib.pyplot as plt
liste_X = np.linspace(-0.5, 0.5, 100)
liste_Y = [f(x) for x in liste_X]
plt.plot(liste_X, liste_Y)
plt.show()
```

3. Tout d'abord, si $x \in]-1, +\infty[$ vérifie $x \neq 0$, alors $\ln(1+x)$ est bien défini (car $1+x > 0$) et non nul (car $1+x \neq 1$ et $\ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1$) donc l'expression $\frac{x}{\ln(1+x)}$ est bien définie.
<u>f est donc bien définie sur $]-1, +\infty[$.</u>

De plus, $h : x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est continue sur son domaine de définition comme quotient de telles fonctions.
Puisque f coïncide avec h sur chaque intervalle <u>ouvert</u> $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$, <u>f est continue sur ces intervalles.</u>

Montrons que f est continue en 0.

On sait que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc par passage à l'inverse, $h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

f coïncide avec h sur un voisinage à droite et à gauche de 0,

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$.

Enfin, $f(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Par théorème, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$: f est continue en 0.

Finalement, f étant continue sur $]-1,0[$, $]0,+\infty[$ et en 0 :

$\boxed{f \text{ est bien continue sur }]-1,+\infty[}$.

4. On a $1+x \xrightarrow[x\to -1]{} 0$ et $\ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty$ donc par

composition : $\ln(1+x) \xrightarrow[x\to -1]{} -\infty$.

Par inverse, $\frac{1}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to -1]{} 0$ donc par produit :

$$h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to -1]{} 0.$$

f coïncide avec h sur un voisinage de -1^+ donc :

$$\lim_{x\to -1} f(x) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} h(x) = 0$$

(1) : f n'est définie que sur un voisinage à droite de -1.

$\boxed{\text{Par définition, } f \text{ est prolongeable par continuité en } -1 \text{ en posant } f(-1)=0.}$

3

5. Soit $x > 0$. Alors :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1+x}{\ln(1+x)} \times \frac{x}{1+x} = \frac{1+x}{\ln(1+x)} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Or, $\begin{cases} 1+x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \frac{t}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \quad \text{par croissance comparée} \end{cases}$

donc par composition : $\frac{1+x}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Sans forme indéterminée :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc par produit : $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.}$

6. a) g est <u>bien définie</u> sur $]-1,+\infty[$ par opérations, car pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

- $1+x > 0$ donc $\ln(1+x)$ est bien défini,
- $1+x \neq 0$ donc $\frac{x}{1+x}$ est bien défini.

De plus, $t \mapsto \ln(1+t)$ est dérivable sur son domaine de définition (comme composée de telles fonctions), et $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ également (comme quotient de polynômes). g est donc dérivable sur son domaine de définition comme combinaison linéaire de telles fonctions.

Finalement, $\boxed{g \text{ est bien défini et dérivable sur }]-1,+\infty[.}$

b) Soit $x \in]-1,+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Or, $(1+x)^2 \geq 0$ et $x \neq -1$ donc $(1+x)^2 \neq 0$. Ainsi, $(1+x)^2 > 0$

donc $g'(x)$ est du signe strict de x.

Le signe de $g'(x)$ est donc donné par :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

c) D'après la question précédente, le tableau de variation de g est :

x	-1		0	
g	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Par décroissance stricte de g sur $]-1,0]$:

$$\forall x \in]-1,0[, \quad g(x) > g(0) = 0$$

Par croissance stricte de g sur $[0,+\infty[$:

$$\forall x > 0, \quad g(x) > g(0) = 0$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[, \quad g(x) > 0}$

7) Soit I l'un des intervalle ouvert $]-1,0[$ ou $]0,+\infty[$.

On a : $\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$,

donc f est dérivable sur I comme quotient, et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\ln(1+x) - x \times \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)^2} = \frac{g(x)}{\ln(1+x)^2}.$$

D'après la question précédente :

$$\forall x \in I, \quad g(x) > 0$$

et $\forall x \in I, \ln(1+x)^2 > 0$ (car $x \neq 0$ donc $\ln(1+x) \neq 0$)

Par quotient : $\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{\ln(1+x)^2} > 0$.

Ainsi, f' est strictement positive sur l'intervalle I : f est donc strictement croissante sur I.

$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur }]-1,0[\text{ et }]0,+\infty[}$.

④

8. f est continue sur $[-1,0]$ et strictement croissante sur $]-1,0[$, donc est strictement croissante sur $[-1,0]$ $(*)$ d'après le résultat admis.

Montrons que f est strictement croissante sur $I=[-1,+\infty[$.

Soit $(x,y)\in I^2$ tel que $x<y$. Montrons $f(x)<f(y)$.

1^e^ cas : Si $x\in[-1,0]$ et $y\in[-1,0]$, alors $f(x)<f(y)$ par croissance stricte de f sur $[-1,0]$ $((*))$.

2^e^ cas : Si $x\in]0,+\infty[$ et $y\in]0,+\infty[$, alors $f(x)<f(y)$ par croissance stricte de f sur $]0,+\infty[$ (question 7).

3^e^ cas : Sinon, $x\in[-1,0]$ et $y\in]0,+\infty[$ (car $x<y$)

Par $(*)$, $f(x)\leq f(0)$ (car $x\leq 0$).

De plus, f est continue sur $[0,y]$ et strictement croissante sur $]0,y[$ (car elle l'est sur $]0,+\infty[$) donc, par le résultat admis, f est strictement croissante sur $[0,y]$.

$y>0$ donne alors : $f(0)<f(y)$.

On a donc $f(x)\leq f(0)<f(y)$. Par transitivité, $f(x)<f(y)$.

Dans tous les cas, $f(x)<f(y)$.

On a donc bien montré : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I}$

9. $\forall x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\ln(1+x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ (sans forme indéterminée, car $\ln(1+x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$)

donc si f admet une asymptote d'équation $y=ax+b$ en $+\infty$, alors $a=0$. On aurait alors $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}b\in\mathbb{R}$

Mais on a montré $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

$\boxed{f \text{ n'a donc pas d'asymptote en } +\infty.}$

10. D'après 8., le tableau de variation de f est :

x	-1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après 3. et 4., f est continue sur $[-1, +\infty[$. Étant strictement croissante, elle réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ vers $f([-1, +\infty[) = [f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [0, +\infty[$, par le théorème de la bijection monotone.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in [0, +\infty[$. Par bijectivité, $\frac{1}{n}$ a donc un unique antécédent par f sur $[-1, +\infty[$:

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = \frac{1}{n} \text{ admet une unique solution } u_n \in [-1, +\infty[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

11. On a $f(-1) = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(-1) < f(u_n) = \frac{1}{n} \leq f(0)$.

Par croissance <u>stricte</u> de f :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ -1 < u_n \leq 0.}$$

12. u_1 est l'unique solution de $f(x) = \frac{1}{1}$.

Or, $f(0) = 1$. Donc $\boxed{u_1 = 0.}$

5

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Par croissance stricte de f :

$$u_{n+1} < u_n.$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} < u_n$: $\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est strictement décroissante}}$.

14. $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante (par 13.) et minorée par -1 (par 11.) donc $\boxed{\text{convergente}}$, par limite monotone.

15. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$ (par 14.).

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq u_n$ donc par passage à la limite : $\ell \geq -1$.

Ainsi, $\begin{cases} f \text{ est continue en } \ell \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases}$ donc par théorème :

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell).$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par unicité de la limite de $(f(u_n))_{n\geq 1}$:

$$f(\ell) = 0.$$

Enfin, $\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(\ell) = 0 \end{cases}$ et f est injective sur $[-1, +\infty[$, donc :

$$\ell = -1.$$

Ainsi, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1}$.

Exercice 3.

1. $\boxed{\begin{array}{l} M(0) = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 \\ 0 & 1-0 \end{pmatrix} = I_2 \\ M(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2a & 0 \\ 0 & 1-2a \end{pmatrix}$

donc $\boxed{M(a) = aJ + (1-2a)I_2}$

De plus, $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} M(a)M(b) &= (aJ + (1-2a)I_2)(bJ + (1-2b)I_2) \\ &= abJ^2 + (1-2a)\times b \cdot J + a\times(1-2b)\cdot J + (1-2a)\times(1-2b)\cdot I_2 \\ &\underset{(J^2 = 2J)}{=} 2abJ + (b-2ab+a-2ab)\cdot J + (1-2a-2b+4ab)I_2 \\ &= (a+b-2ab)\cdot J + (1-2(a+b-2ab))I_2 \\ &\underset{(\text{d'après } 2.)}{=} M(a+b-2ab). \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M(a)M(b) = M(a+b-2ab).}$

4. Soit $a \neq \frac{1}{2}$.

Pour tout réel b, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$, et $M(0) = I_2$

donc si $a+b-2ab = 0$, alors $M(a)M(b) = I_2$.

Or, $a+b-2ab = 0 \iff (1-2a)b = -a \iff b = \frac{a}{2a-1}$ ($a \neq \frac{1}{2}$ donc $2a-1 \neq 0$)

Posons maintenant $b = \frac{a}{2a-1}$.

On a donc $M(a)M(b) = I_2$. $M(a)$ étant inversible à droite, elle est inversible d'inverse $M(a)^{-1} = M(b)$.

Finalement : $\boxed{\text{Si } a \neq \tfrac{1}{2}, \text{ alors } M(a) \text{ est inversible d'inverse } M\left(\tfrac{a}{2a-1}\right).}$

6

5. $M(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\det(M(\frac{1}{2})) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

Par théorème, $\boxed{M(\frac{1}{2}) \text{ n'est pas inversible}}$.

6. Soit $a_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$M(a_0)^2 = M(a_0) \iff M(a_0)M(a_0) = M(a_0)$$

$$\underset{(3.)}{\iff} \underline{M(a_0 + a_0 - 2a_0^2) = M(a_0)}$$

Or, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x) = M(y) \iff \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & y \\ y & 1-y \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} 1-x = 1-y \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff x = y.$$ (*)

Il vient donc : $M(a_0)^2 = M(a_0) \iff M(2a_0 - 2a_0^2) = M(a_0)$

$$\iff 2a_0 - 2a_0^2 = a_0$$

$$\iff a_0(1 - 2a_0) = 0$$

$$\iff a_0 = 0 \text{ ou } 1 - 2a_0 = 0$$

$$\iff a_0 = \frac{1}{2} \quad (\text{car } a_0 \neq 0).$$

$\boxed{\text{L'unique réel } a_0 \text{ non nul tel que } M(a_0)^2 = M(a_0) \text{ est } a_0 = \frac{1}{2}}$.

7. (a) On a donc posé $P = M(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}J$.

Pour tout réel α :

$$M(a) = P + \alpha Q \iff M(a) = \frac{1}{2}J + \alpha I_2 - \frac{\alpha}{2}J$$

$$\iff M(a) = \frac{1-\alpha}{2}J + \alpha I_2$$

$$\iff M(a) = \frac{1-\alpha}{2}J + \left(1 - 2 \times \frac{1-\alpha}{2}\right)I_2$$

$$\iff M(a) = M\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$\iff a = \frac{1-\alpha}{2}$$ (d'après le raisonnement en question 6.) (*)

$$\iff \alpha = 1 - 2a$$

$$\boxed{\text{L'unique réel } \alpha \text{ tel que } M(a) = P + \alpha Q \text{ est } \alpha = 1-2a.}$$

(b) $P^2 = (\frac{1}{2} J)^2 = (\frac{1}{2})^2 \cdot J^2 = \frac{1}{4} \cdot (2J) = \frac{1}{2} J = P$

$Q^2 = (I_2 - P)^2 = I_2^2 - 2 I_2 \times P + P^2$ (car $I_2 P = P I_2 = P$)

$= I_2 - 2P + P$ (car $P^2 = P$)

$= I_2 - P = Q$

$PQ = P(I_2 - P) = P - P^2 = O_2$

$QP = (I_2 - P)P = P - P^2 = O_2$

Ainsi : $\boxed{P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad QP = PQ = O_2.}$

(c) On pourrait ici utiliser la formule du binôme de Newton avec le résultat de (a) ($QP = PQ = O_2$ donc P et αQ commutent).

Plus simple :

$M(a)^2 = (P + \alpha Q)^2 = P^2 + 2\alpha PQ + \alpha^2 Q^2$ (car $\begin{cases} P \times (\alpha Q) = \alpha (PQ) = O_2 \\ (\alpha Q)P = \alpha (QP) = O_2 \end{cases}$)

$= P + \alpha^2 Q$

Montrons par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M(a)^n = P + \alpha^n Q}$$

Init: $M(a)^1 = P + \alpha Q = P + \alpha^1 Q$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M(a)^n = P + \alpha^n Q$.

Alors, $M(a)^{n+1} = M(a)^n M(a) \underset{(H.R)}{=} (P + \alpha^n Q)(P + \alpha Q)$

$= P^2 + P(\alpha Q) + \alpha^n QP + \alpha^n Q \times \alpha Q$

$= P + \alpha(PQ) + \alpha^n (QP) + \alpha^{n+1} Q$ (car $P^2 = P$, $Q^2 = Q$)

$= P + \alpha^{n+1} Q$ (car $PQ = QP = O_2$).

Ceci conclut l'hérédité, d'où le résultat annoncé.

7 d) On a $P^2 = P$ par b.), donc on va montrer par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P^n = P.}$$

Initialisation : $P^1 = P$ est évident, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^n = P$.

Montrons $P^{n+1} = P$.

Par hypothèse de récurrence, $P^n = P$, donc $P^{n+1} = P^2 = P$, d'où l'hérédité.

e) On avait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M(a)^n = P + \alpha^n Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M(a)^n &= \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha^n}{2} & \frac{1-\alpha^n}{2} \\ \frac{1-\alpha^n}{2} & \frac{1+\alpha^n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2a)^n}{2} & \frac{1-(1-2a)^n}{2} \\ \frac{1-(1-2a)^n}{2} & \frac{1+(1-2a)^n}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}}.$$

Vérifions si, lorsque $a \neq \frac{1}{2}$, la formule est valable pour $n = -1$.

Posons $N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(1-2a)^{-1} & 1-(1-2a)^{-1} \\ 1-(1-2a)^{-1} & 1+(1-2a)^{-1} \end{pmatrix}$.

On a $1 - (1-2a)^{-1} = 1 - \frac{1}{1-2a} = \frac{1-2a-1}{1-2a} = 2 \times \frac{a}{2a-1}$

donc $(1-2a)^{-1} = 1 - 2\frac{a}{2a-1}$

donc $N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 - 2\frac{a}{2a-1} & \frac{2a}{2a-1} \\ 2\frac{a}{2a-1} & 2 - \frac{2a}{2a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{2a-1} & \frac{a}{2a-1} \\ \frac{a}{2a-1} & 1 - \frac{a}{2a-1} \end{pmatrix}$

$= M\left(\frac{a}{2a-1}\right) = M(a)^{-1}$ par 4.

Ainsi, $\boxed{\text{la formule reste valable pour } n = -1 \text{ si } a \neq \frac{1}{2}}$.

Exercice 4.

1a) Une stratégie gloutonne consiste ici à choisir un à un les éléments gardés, en choisissant à chaque fois le plus grand élément de la liste possible (dont on a pris aucun voisin).

Pour la liste $L = [5, 4, 16, 3, 4, 15, 9, 12, 14, 19, 18, 1, 23, 2]$, cette stratégie choisit :

- 23 (le plus grand), puis :
- 19, puis
- 16 (on ne peut choisir 18), puis
- 15 et enfin,
- 12.

La stratégie gloutonne envisagée donne ici un choix de somme 85.

b) On peut faire mieux, dans l'exemple précédent, en choisissant les entiers soulignés :

[5, 4, <u>16</u>, 3, 4, <u>15</u>, 9, 12, <u>14</u>, 19, <u>18</u>, 1, <u>23</u>, 2]

La somme obtenue est alors de $86 > 85$.

La solution proposée par l'algorithme glouton n'est donc pas optimale ... à priori.

2a)

```
def contrainte(G, i):
        if (i in G) or ((i-1) in G) or ((i+1) in G) :
                return(False)
        return(True)
```

⑧ b) La fonction Mystere appliquée en (L, G) renvoie l'indice du plus grand élément de L parmi ceux dont $\left\{\begin{array}{l}\text{l'indice n'est pas dans } G\text{, et} \\ \text{l'indice des voisins n'est pas dans } G.\end{array}\right.$

c)

```
import numpy as np
def ChoixGlouton(L):
    Sol = []   # Contiendra les indices gardés
    for i in range(5):   # faire 5 fois:
        g = Mystere(L,Sol)   # Choix du plus grand possible
        Sol.append(g)   # ajout à la liste des indices gardés
    Somme = np.sum([L[i] for i in Sol])   # np.sum fait la somme
    return(Sol, Somme)
```

Exercice 5

Partie I

1 a) $\boxed{PQ = 4I_3}$ en posant le produit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $PQ = 4I_3$ donc $\frac{1}{4} \cdot PQ = \frac{1}{4} \cdot 4I_3 = (\frac{1}{4} \times 4) I_3 = I_3$

d'où $P \times (\frac{1}{4}Q) = I_3$.

P est inversible à droite donc inversible, et son inverse est

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étudions l'inversibilité de $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

à l'aide d'un système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} -\lambda x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = y_1 \\ \frac{1}{3} x_1 - \lambda x_2 = y_2 \\ \frac{1}{3} x_1 - \lambda x_3 = y_3 \end{cases} \qquad (\text{où } (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3).$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3y_1 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ x_1 - 3\lambda x_2 = 3y_2 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ x_1 - 3\lambda x_3 = 3y_3 & L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3\lambda x_3 = 3y_3 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x_1 - 3\lambda x_2 = 3y_2 & \\ -3\lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3y_1 & L_1 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3\lambda x_3 = 3y_3 & \\ -3\lambda x_2 + 3\lambda x_3 = 3y_2 - 3y_3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2x_2 + (2 - 9\lambda^2) x_3 = 3y_1 + 9\lambda y_3 & L_3 \leftarrow L_3 + 3\lambda L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3\lambda x_3 = 3y_3 & \\ 2x_2 + (2 - 9\lambda^2) x_3 = 3y_1 + \cancel{3x_3}\, 9\lambda y_3 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -3\lambda x_2 + 3\lambda x_3 = 3y_2 - 3y_3 & L_2 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T) \begin{cases} x_1 - 3\lambda x_3 = \dots & \\ 2x_2 + (2 - 9\lambda^2) x_3 = \dots & \\ \left(3\lambda + \frac{3}{2}\lambda(2 - 9\lambda^2)\right) x_3 = \dots & L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}\lambda L_2 \end{cases}$$

Alors, <u>$M - \lambda I_3$ est inversible</u> ssi (S) est de Cramer

ssi (T) est de Cramer

ssi <u>les coefficients diagonaux de T sont non nuls</u> (car (T) triangulaire).

(9) Donc $M-\lambda I_3$ est inversible si et seulement si

$$3\lambda + \frac{3}{2}\lambda(2-9\lambda^2) \neq 0.$$

Or, $3\lambda + \frac{3}{2}\lambda(2-9\lambda^2) = \lambda\left(3 + 3 - \frac{3\times 9}{2}\lambda^2\right)$

$$= \lambda\left(6 - \frac{27}{2}\lambda^2\right)$$

$$= -\frac{27}{2}\lambda\left(\lambda^2 - \frac{12}{27}\right)$$

$$= -\frac{27}{2}\lambda\left(\lambda^2 - \frac{4}{9}\right) = -\frac{27}{2}\lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda + \frac{2}{3}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\text{"}M-\lambda I_3 \text{ est inversible"} \iff \lambda\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)\left(\lambda+\frac{2}{3}\right) \neq 0 \iff \lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}}.$

3. a) $P^{-1} = \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

donc $P^{-1}M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $P^{-1}MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$

b) Montrons $\boxed{\text{"}\forall j \geq 1,\ P(j) : M^j = PD^jP^{-1}\text{"}}$ par récurrence.

<u>Init.</u> Par définition, $D = P^{-1}MP$ donc $PDP^{-1} = P(P^{-1}MP)P^{-1}$

$$= (PP^{-1})M(PP^{-1})$$

$$= I_3 M I_3 = M.$$

On a bien $P(1) : M^1 = PD^1P^{-1}$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $j \geq 1$. Supposons $P(j)$, montrons $P(j+1)$.

Par $P(j)$: $\quad M^j = PD^jP^{-1}$

donc $\quad M^{j+1} = PD^jP^{-1} \times M$

Par $P(1)$: $\quad M = PDP^{-1}$ donc il vient :

$$M^{j+1} = (PD^jP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^j(P^{-1}P)DP^{-1}$$
$$= P\,D^j \times D\,P^{-1} \qquad (\text{car } PP^{-1} = I_3)$$
$$= PD^{j+1}P^{-1}.$$

Ceci démontre $P(j+1)$, d'où l'hérédité et le résultat annoncé.

Pour $j = 0$, on a $M^0 = I_3$ par définition et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, donc la relation est toujours valable.

4. Soit $j \geq 1$.

$M^j = PD^jP^{-1}$, or $D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc D étant diagonale le calcul de D^j est immédiat :

$$D^j = \begin{pmatrix} (2/3)^j & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, posant le produit :

$$PD^j = \begin{pmatrix} 2(2/3)^j & -2(-2/3)^j & 0 \\ (2/3)^j & (-2/3)^j & 0 \\ (2/3)^j & (-2/3)^j & 0 \end{pmatrix}$$

puis : $M^j = (PD^j)P^{-1} = \frac{1}{4}(PD^j) \times Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(\frac{2}{3})^j + 2(-\frac{2}{3})^j & 2(\frac{2}{3})^j - 2(-\frac{2}{3})^j & 2(\frac{2}{3})^j - 2(-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{7})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j \end{pmatrix}$

10

La première colonne de M^j est bien :

$$\boxed{C_j = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}}.$$

5. La première colonne de $M^0 = I_3$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\times 1 + 2\times 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{La formule précédente est valable pour } j = 0.}$

Partie II

6. Le 1e résultat étant le numéro de la première boule tirée, et ce tirage se faisant en situation d'équiprobabilité parmi 3 boules :

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1(1)) = \mathbb{P}(R_1(2)) = \mathbb{P}(R_1(3)) = \frac{1}{3}}.$$

7. a) Montrons par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \begin{cases} \mathbb{P}(R_n(1)) \neq 0 \\ \mathbb{P}(R_n(2)) \neq 0 \\ \mathbb{P}(R_n(3)) \neq 0 \end{cases}}.$$

Initialisation : $P(1)$ est une conséquence directe de la question 6, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, $\mathbb{P}(R_n(1)) \neq 0$ (donc $\mathbb{P}(R_n(1)) > 0$).

Or, pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$\mathbb{R}_n(1) \cap R_{n+1}(i) \subset R_{n+1}(i)$$

donc $\mathbb{P}(R_n(1) \cap R_{n+1}(i)) \leq \mathbb{P}(R_{n+1}(i))$

Or, $\mathbb{P}(R_n(1) \cap R_{n+1}(i)) = \mathbb{P}(R_n(1)) \mathbb{P}_{R_n(1)}(R_{n+1}(i))$ (car $R_n(1) \neq \emptyset$)

Mais $\mathbb{P}_{R_n(1)}(R_{n+1}(i))$ est la probabilité de tirer la boule numéro i au $n+1$-ième tirage, d'après le protocole, donc vaut $\frac{1}{3}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(R_{n+1}(i)) \geqslant \mathbb{P}(R_n(1) \cap R_{n+1}(i)) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_n(1)) > 0$

On a donc $\mathbb{P}(R_{n+1}(i)) > 0$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$.

Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité et le résultat annoncé.

b) D'après le protocole, la probabilité conditionnelle

$\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(1))$ (bien définie car $\mathbb{P}(R_k(2)) \neq 0$ par 7. a))

est la probabilité de tirer la boule numéro 1 ou 3 lors du $k+1$-ième tirage (sachant que le k-ième résultat est 2, ce qui, par indépendance des tirages, n'influe pas). Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(1)) = \frac{2}{3}}$$

, car les tirages sont en situation d'équiprobabilité.

c) D'après 7 (a), $R_k(1)$, $R_k(2)$ et $R_k(3)$ sont de probabilité non nulle donc les probabilités conditionnelles envisagées par la question sont bien définies.

D'après le protocole, $\mathbb{P}_{R_k(1)}(R_k(j))$ est la probabilité de tirer la boule numéro j au $k+1$-ième tirage (pour $1 \leq j \leq 3$).

Par équiprobabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_k(1)}(R_{k+1}(1)) = \mathbb{P}_{R_k(1)}(R_{k+1}(2)) = \mathbb{P}_{R_k(1)}(R_{k+1}(3)) = \frac{1}{3}}.$$

De plus, si $i \in \{2,3\}$, $\mathbb{P}_{R_k(i)}(R_{k+1}(i))$ est la probabilité de tirer la boule numéro i au $k+1$-ième tirage :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(2)) = \mathbb{P}_{R_k(3)}(R_{k+1}(3)) = \frac{1}{3}}.$$

Enfin, par un raisonnement analogue à la question 7 b :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(1)) = \mathbb{P}_{R_k(3)}(R_{k+1}(1)) = \frac{2}{3}}$$

et d'après le protocole : $\boxed{\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(3)) = \mathbb{P}_{R_k(3)}(R_{k+1}(2)) = 0}$.

8 a)

Soit $k \geq 1$.

D'après la formule des <u>probabilités</u> totales appliquée au système complet d'événement $(R_k(1), R_k(2), R_k(3))$, de probabilités non nulles d'après 7 (a) :

$$\mathbb{P}(R_{k+1}(1)) = \mathbb{P}(R_k(1))\,\mathbb{P}_{R_k(1)}(R_{k+1}(1)) + \mathbb{P}(R_k(2))\,\mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(1)) + \mathbb{P}(R_k(3))\,\mathbb{P}_{R_k(3)}(R_{k+1}(1))$$

donc (par 7(c)) $\mathbb{P}(R_{k+1}(1)) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(1)) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(R_k(2)) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(R_k(3))$.

Un raisonnement similaire donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{k+1}(2)) &= \mathbb{P}_{R_k(1)}(R_{k+1}(2))\,\mathbb{P}(R_k(1)) + \mathbb{P}_{R_k(2)}(R_{k+1}(2))\,\mathbb{P}(R_k(2)) + \mathbb{P}_{R_k(3)}(R_{k+1}(2))\,\mathbb{P}(R_k(3)) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(1)) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(2))\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(R_{k+1}(3)) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(1)) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(3))$.

Finalement :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ U_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(1)) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(R_k(2)) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(R_k(3)) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(1)) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(2)) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(1)) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(R_k(3)) \end{pmatrix}}.$$

b). Si on pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$, la question précédente donne :

$$\forall k \geqslant 1,\ U_{k+1} = AU_k$$

(par calcul direct).

c) On a : $\forall k \geqslant 1,\ U_{k+1} = AU_k$.

Une récurrence immédiate montre (<u>la rédiger !</u>)

$\underline{\forall k \geqslant 1,\ U_k = A^{k-1}U_1}$.

De plus, posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$AU_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = U_1 \quad \text{(d'après la question 6.)}$$

Donc : $\forall k \geqslant 1,\ U_k = A^{k-1}U_1 = A^{k-1}(AU_0) = A^k U_0$.

Enfin, $U_0 = A^0 U_0$ est clair car $A^0 = I_3$, donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = A^k U_0}$$

12)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

donc on observe :

$$\boxed{A = M + \frac{1}{3} I_3 .}$$

De plus, $M \times \left(\frac{1}{3} I_3\right) = \frac{1}{3}(M \times I_3) = \frac{1}{3} M = \left(\frac{1}{3} I_3\right) \times M$

donc M et $\frac{1}{3} I_3$ commutent.

Par la formule du binôme de Newton :

$$\forall k \geq 0,\ A^k = \left(M + \frac{1}{3} I_3\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} I_3\right)^{k-j} M^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} I_3^{k-j} M^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \quad \left(\text{car } \forall j \in [\![0,k]\!],\ I_3^{k-j} M^j = I_3 M^j = M^j\right).$$

On a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

10) Les opérations "somme de matrices" et "produit d'une matrice par un réel" se faisant coefficient par coefficient, la première colonne D_k de A^k est donnée par

$$\underline{D_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} C_j}$$

(C_j étant la première colonne de M^j, on utilise la question 9.).

Ainsi :

$$D_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \frac{1}{4} \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \\ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \frac{1}{4} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \\ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \frac{1}{4} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \end{pmatrix}$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{4}$

et $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

par la formule du binôme de Newton.

Par linéarité, on a donc :

$$\boxed{D_k = \begin{pmatrix} 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \\ \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \\ \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \end{pmatrix}}$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$U_k \underset{(8c)}{=} A^k U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) & * & * \\ \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) & * & * \\ \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = D_k.$$

Donc : $\boxed{\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(R_k(1)) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right). \\ \mathbb{P}(R_k(2)) = \mathbb{P}(R_k(3)) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \end{array}}$

12. Pas la place !