Chapitre 16 : Dérivation

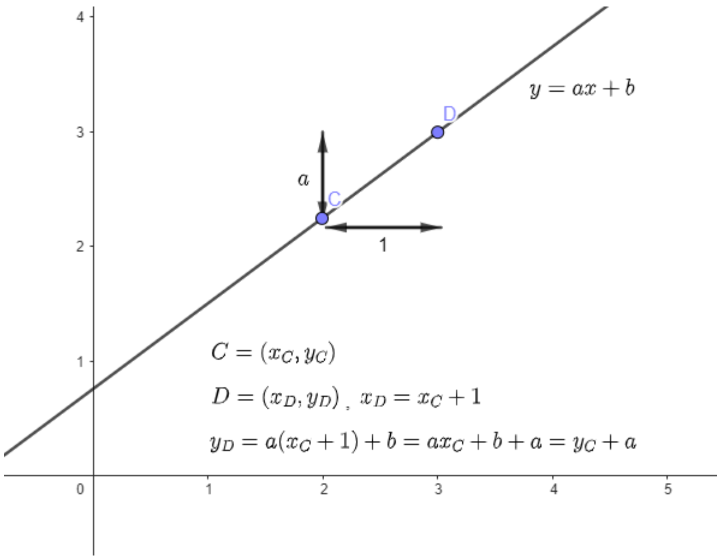
ECG1 A, Lycée Hoche

I. Notion de fonction dérivable

1. Pente, taux d'accroissement

Définition 1. Soient a et b deux réels. Considérons la droite d non verticale d'équation cartésienne $y = ax + b$. On dit que a est *la pente*, ou *le coefficient directeur* de d.

Remarque. La pente d'une droite non verticale représente la variation d'ordonnée obtenue en se déplaçant de 1 en abscisse. Pour cette raison, on dit généralement qu'une droite verticale (donc, d'équation $x = c$) admet une pente de $+\infty$.

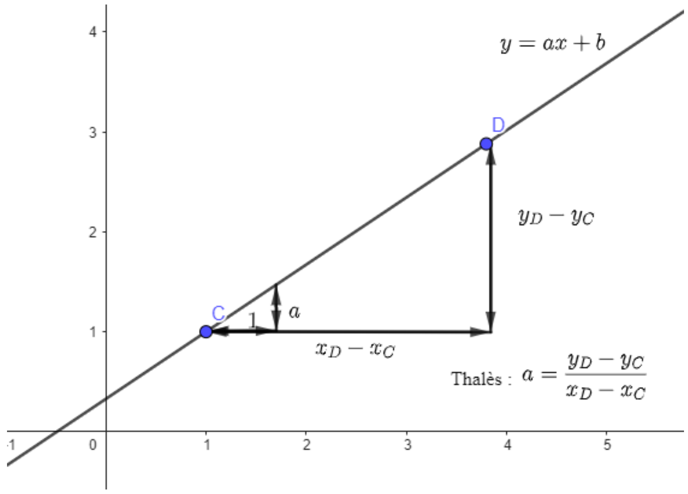


Proposition 2. *Soient C et D deux points d'une droite non verticale, d'équation $y = ax+b$. Alors, la pente a de cette droite est :*

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

où $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$.

Cette proposition est une conséquence du théorème de Thalès.

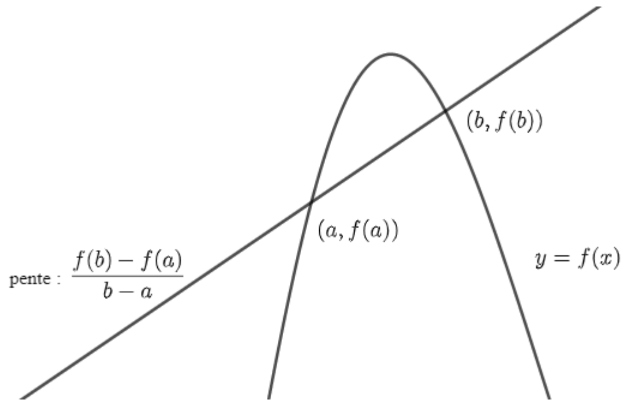


Ceci explique la définition suivante.

Définition 3. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soient a et b deux éléments distincts de I. On appelle *taux d'accroissement de f entre a et b* le réel :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque. Le taux d'accroissement de f entre a et b est la pente de la droite passant par les points du graphe de f d'abscisse a et b.



Remarque. L'ordre de a et b ne compte pas dans la définition ci-dessus, car :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Autrement dit, le taux d'accroissement de f entre a et b est aussi le taux d'accroissement de f entre b et a.

2. Nombre dérivé

Considérons le taux d'accroissement $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ d'une fonction f entre deux points a et b. Plus b est proche de a, plus la droite envisagée par ce taux d'accroissement se rapproche de ce qu'on veut appeler la tangente de la courbe de f au point a.

Définition 4. Soit I un intervalle et f une fonction réelle définie sur un I. Soit $a \in I$. On dit que *f est dérivable en a* si le taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ admet une limite finie quand b tend vers a.
Dans ce cas, on appelle nombre dérivé de f en a le réel noté $f'(a)$ donné par :

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Remarque. Sous réserve d'existence, le nombre dérivé de f en a est donc la pente de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$.

Remarque. Au lieu de considérer la limite de $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ lorsque b tend vers a, on considère généralement la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Cela donne une caractérisation équivalente de la dérivabilité, car pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$$

On procède alors au changement de variable $h = b - a$ dans un sens, et $b = a + h$ dans l'autre.

Proposition 5. *Dans le contexte de la définition ci-dessus, il est équivalent de dire:*

(i) f est dérivable en a,

(ii) la limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

Dans ce cas,

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Démonstration. Voir remarque ci-dessus. □

Exemple 6. (*i*) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, le monôme $f_n(x) = x^n$ est dérivable en x, et

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

(*ii*) Considérons la fonction racine carrée donnée par $r(x) = \sqrt{x}$.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors r est dérivable en x, et

$$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction r n'est pas dérivable en 0, et

$$\lim_{b \to 0} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{0}}{b-0} = +\infty.$$

Proposition 7. *La valeur des limite suivantes est admise :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Exemple 8. Dans cet exemple, on utilise les propriétés de morphisme de l'exponentielle et du logarithme pour démontrer leur dérivabilité à partir des limites admises ci-dessus.

(i) La fonction exponentielle $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en tout réel x, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x$$

(ii) La fonction logarithme $g : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable en tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 9. Soit I un intervalle, f une fonction réelle définie sur I et $a \in I$. On suppose dans (i) que f est définie sur un voisinage à droite de a, et dans (ii) que f est définie sur un voisinage à gauche de a.

(i) On dit que f est *dérivable à droite* en a si la limite $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle *nombre dérivé à droite de f* en a le réel

$$f'_d(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(ii) On dit que f est *dérivable à gauche* en a si la limite $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle *nombre dérivé à gauche de f* en a le réel

$$f'_g(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque. La dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction définie uniquement à gauche (resp. à droite) de a n'est pas envisageable. Par exemple, étudier la dérivabilité à gauche de la racine carrée en 0 n'a pas de sens.

D'après les propositions correspondantes sur les limites :

Proposition 10. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On suppose que f est définie sur un voisinage de a. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) f est dérivable en a

(ii) f est dérivable à droite et à gauche en a, et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration. A noter. □

Proposition 11. *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in I$.*

(i) On suppose que f n'est définie qu'à droite de a (a est donc la borne inférieure de I). Alors, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a, et dans ce cas :

$$f'(a) = f'_d(a).$$

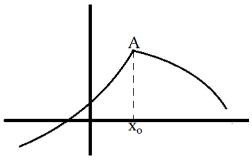
(ii) On suppose que f n'est définie qu'à gauche de a (a est donc la borne supérieure de I). Alors, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a, et dans ce cas :

$$f'(a) = f'_g(a).$$

Démonstration. Similaire à la proposition précédente (d'après une propriété correspondante sur les limites). □

Exemple 12. $x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Remarque. (Et définition :) On dit que la courbe de $f : I \to \mathbb{R}$ admet un *point anguleux* en $a \in I$ si f est dérivable à droite et à gauche en a, mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$. Dans ce cas, f n'est pas dérivable en a.



Remarque. À partir de maintenant et pour toute la suite du chapitre, I est un intervalle non vide et non réduit à un point.

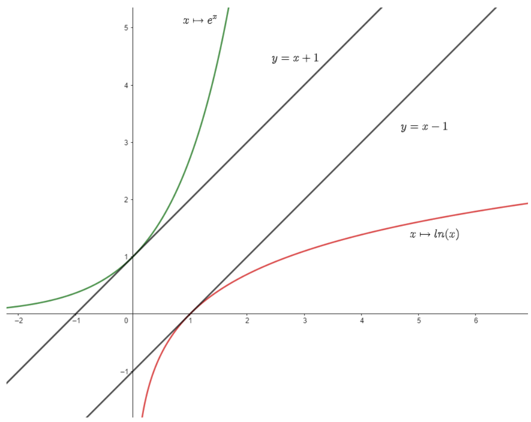
4. Tangente en un point

Définition 13. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a, on appelle *tangente à la courbe de f en a* la droite d'équation :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

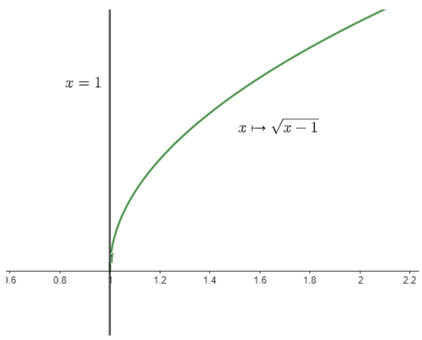
Remarque. Sous réserve d'existence, la tangente de la courbe de f en a est l'unique droite de pente $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$. C'est comme ça qu'on retient bien cette formule : la pente de la droite donnée est clairement $f'(a)$, et cette droite passe clairement par $(a, f(a))$.

Exemple 14. (i) La tangente à courbe de la fonction exponentielle en 0 est la droite d'équation :
$$y = x + 1$$

(ii) La tangente à courbe de la fonction logarithme en 1 est la droite d'équation :
$$y = x - 1$$



Définition 15. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que la courbe de f admet une *tangente verticale en a* si :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \pm\infty.$$



Exemple 16. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en 0.

La proposition suivante se traduira plus tard par les termes suivants : sous reserve d'existence, la tangente à la courbe d'une fonction en un point est une approximation de cette fonction à l'ordre 1.

Proposition 17. (et définition.) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors, il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que :*

(i) $\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$

(ii) $\epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

L'égalité (i) *est appelée* le développement limité de f en a à l'ordre 1.

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Dans l'égalité $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$, on reconnait :

(i) la formule de la tangente $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$, additionnée à

(ii) la fonction $x \mapsto (x-a)\epsilon(x)$ qui est le produit de $x \mapsto (x-a)^1$ par une fonction qui tend vers 0 en a (c'est donc une fonction qui tend vers 0 plus vite que $(x-a)^1$ en a, d'où la terminologie de développement limité " à l'ordre 1").

5. Lien avec la continuité

Proposition 18. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en $a \in I$.*

Démonstration. A noter. $\square$

Remarque. Cela permet de justifier, si besoin est, la dérivabilité des fonctions rencontrées, et d'obtenir d'emblée leur continuité.

Remarque. La fonction partie entière n'est pas continue en 0, donc n'est pas dérivable en 0 par contraposée.

6. Fonction dérivée

Définition 19. Soit f une fonction réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. On dit que f *est dérivable sur D* si f est dérivable en tout point $x \in D$.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction

$$f' : \left| \begin{array}{lcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Remarque. Pour vérifier qu'une fonction est dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$, nous utiliserons généralement les propositions de la partie suivante. Dans les autres cas, on reviendra à la définition (en considérant le taux d'accroissement), et on ne considèrera que les dérivabilité à gauche ou a droite pour les bornes du domaine d'étude.

Remarque. La considération d'une *partie D* dans la définition précédente permet de définir ces notions pour, par exemple, des réunions d'intervalles.

Exemple 20. Montrons que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Exemple 21. Si $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Démonstration : partie suivante, comme composée de la fonction inverse et d'un monôme.

Exemple 22. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration : partie suivante, comme composée.

Exemple 23. Toute fonction constante est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée la fonction nulle.

Voici un **Tableau récapitulatif** des dérivées déjà rencontrées.

Fonction	Dérivée	Domaine
$x^n, n \in \mathbb{N}$		
$x^n, n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$		
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		
$\sqrt{x}$		
e^x		
$\ln(x)$		

Remarque. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$: la 4e ligne est un cas particulier de la 3e.

II. Opérations sur les fonctions dérivables

1. Combinaisons linéaires, produit et quotient

Proposition 24. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur une partie D de $\mathbb{R}$. Alors :*

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur D, et

$$\forall x \in D, (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

On dit que la dérivation est linéaire (elle est compatible avec les combinaisons linéaires).

(ii) La fonction fg est dérivable sur D, et

$$\forall x \in D, (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) Si de plus g ne s'annule pas sur D, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur D, et

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Démonstration. Combinaison linéaire et produit à noter. Le quotient sera traité plus tard, à l'aide de l'inverse (de manière indépendante). □

En pratique, on utilise donc la proposition suivante :

Proposition 25. *Toute combinaison linéaire, tout produit ou tout quotient de fonctions dérivables sur leurs domaines de définitions est dérivable sur son domaine de définition.*

Exemple 26. Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction dérivée d'un polynôme est donnée par le polynôme dérivé.

2. Composition

Proposition 27. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en $x \in I$ et si g est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Démonstration. A noter. □

En pratique, on utilise :

Proposition 28. *Toute composée (bien définie) de fonctions dérivables sur leurs domaines de définitions est dérivable sur son domaine de définition.*

Exemple 29. Étudions la dérivabilité des fonctions :

(*i*) $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x^2)$,

(*ii*) $f_2 : x \mapsto (x^3 - 1)^n$.

Remarque. Attention, la fonction racine carrée est une fonction courante, qui est définie et non dérivable en 0. Ainsi, les propositions ci dessus permettent de justifier la dérivabilité d'une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ uniquement en les points x tels que $f(x) \neq 0$.

Exemple 30. Étudions la dérivabilités de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

Exemple 31. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $g : x \mapsto f(x)^n$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, g'(x) = nf(x)^{n-1} \times f'(x).$$

Cette formule est aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$ si f ne s'annule pas, et pour $n = 0$, g est la fonction constante égale à 1 donc est dérivable de dérivée nulle.

Exemple 32. Si une fonction f est dérivable et non nulle sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

Démonstration. Terminons la démonstration de la proposition 8 : démontrons la formule donnant la dérivée d'un quotient. □

3. Dérivation de la réciproque d'une fonction bijective (HP)

Proposition 33. *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle bijective. Soit $x \in I$ tel que f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$. Alors, $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y = f(x)$, et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. La dérivabilité de f^{-1} est admise (mais accessible, à condition d'admettre sa continuité, comme pour le théorème de la bijection). Démonstration de la formule : à noter. □

Remarque. La méthode vue dans la démonstration est un moyen remarquable de retrouver la formule.

Remarque. En pratique, pour étudier la dérivabilité de la réciproque f^{-1} d'une fonction bijective dérivable f :

(i) On calcule la fonction dérivée de f,

(ii) on détermine l'ensemble Z des points x tels que $f'(x) = 0$,

(iii) on utilise la proposition ci-dessus : f^{-1} est dérivable en dehors de l'ensemble image $f(Z)$ de Z par f.

Une conséquence simple :

Proposition 34. *Si une fonction bijective est dérivable sur son domaine de définition, et si sa dérivée ne s'annule pas, alors sa fonction réciproque est dérivable sur son domaine de définition.*

4. Tableau récapitulatif

Dans ce tableau, u et v sont des fonctions dérivables.

Opération	Dérivée	Conditions supplémentaires de dérivabilité
$\alpha u + \beta v$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$		
uv		
u^n, $n \in \mathbb{Z}$		
u^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		
$\frac{u}{v}$		
$\sqrt{u}$		
e^u		
$\ln(u)$		
$u \circ v$		
u^{-1}		

Exercice 35. Déterminer le domaine de dérivabilité et les dérivées des fonctions données par :

(i) $f(x) = a^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, (ii) $g(x) = \ln(e^{3x} + 4x^2)$ (iii) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^3}}$.

5. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 36. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et n un entier.

(*i*) On dit que f est n fois dérivable sur I si l'on peut dériver n fois successivement la fonction f sur l'intervalle I. Dans ce cas, on note $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ la fonction dérivée n-ième de f sur I. Par convention, on note $f^{(0)} = f$, et $f'' = f^{(2)}$.

(*ii*) On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

(*iii*) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque. Ainsi, une fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I si et seulement si f et f' sont dérivables sur I, et si de plus f'' est continue sur I.

Remarque. Attention à ne pas oublier la condition de continuité de $f^{(n)}$ sur I pour montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Toute fonction dérivable sur I y étant continue, si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors les fonctions $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues et dérivables sur I, et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque. Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors pour tout entier n, $f^{(n)}$ est bien définie et continue sur I. Et c'est une équivalence.

Remarque. Pour une définition plus formelle, la suite de fonctions $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $f^{(0)} = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, sous réserve de dérivabilité.

Exemple 37. La fonction exponentielle, notée ici f, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f' = f$. Une récurrence immédiate montre alors que l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = f.$$

Proposition 38. *(i) Les fonctions polynômiales, les fractions rationnelles, l'exponentielle et le logarithme sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs domaines de définition.*

(ii) Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (cet énoncé inclus la racine carrée).

(iii) Sous réserve de bonne définition, toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient et toute composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$(resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur leurs domaines de définitions est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur son domaine de définition.

Remarque. Les démonstrations se font par récurrence, et sont sans surprises.

Remarque. On peut donc utiliser le même schéma de rédaction pour le caractère $\mathcal{C}^n$ d'une fonction que pour la continuité et la dérivabilité.

Exemple 39. Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1})$ et montrer que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Remarque. Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ est simplement une fonction continue.

Passons aux formules permettant de calculer des dérivées n-ièmes :

Proposition 40. *Soit n un entier naturel. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Alors,*

(i) La fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

(ii) La fonction fg est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Démonstration. À noter. □

On conséquence directe :

Proposition 41. *Le produit et la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors les fonctions $f^{(k)}$ sont toutes continues et les formules précédentes montrent donc que les fonctions $(f+g)^{(n)}$ et $(fg)^{(n)}$ sont continues, par opérations. □

Remarque. Cette proposition est aussi vraie pour la composition (exercice).

III. Le théorème des accroissements finis, causes et conséquences

Chaque théorème de cette partie est un des grand théorème de l'analyse réelle.

1. Extrema locaux et dérivation

Définition 42. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in D$.

(i) On dit que f admet un maximum local en a si :

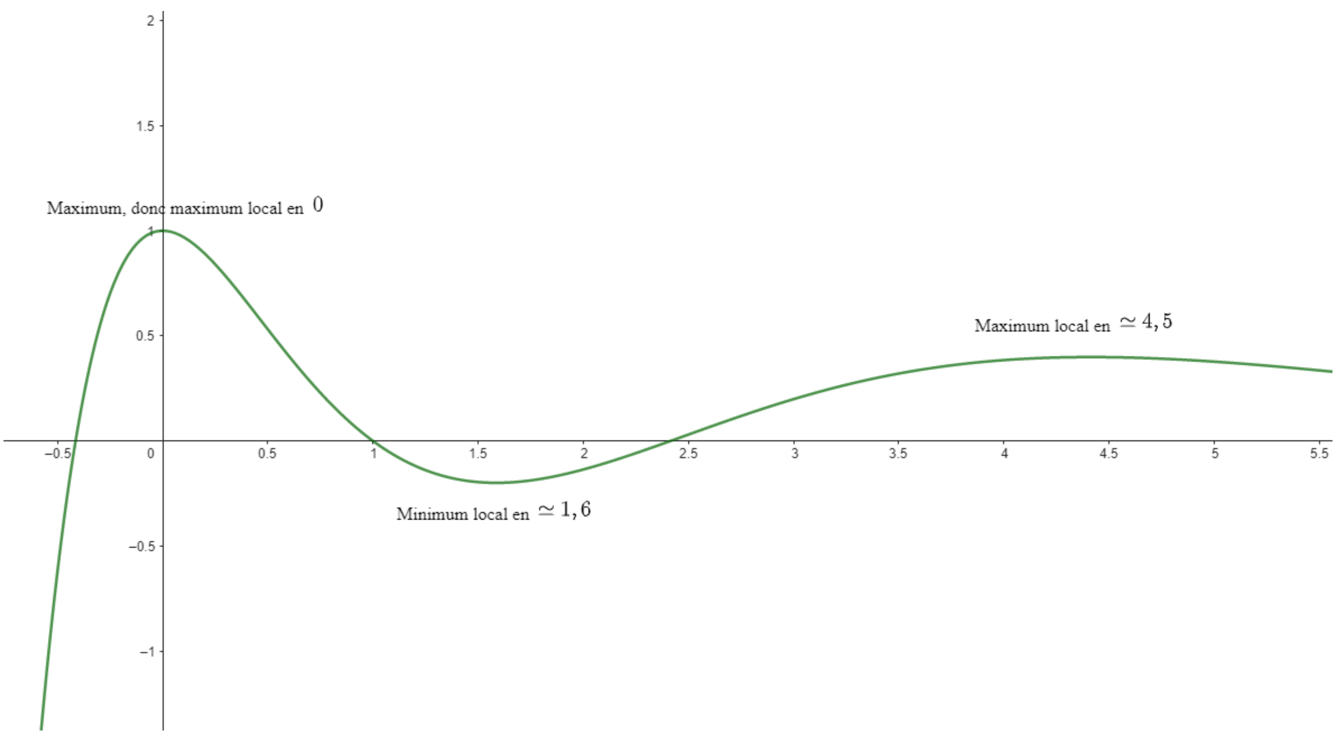
$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]a-\delta, a+\delta[, f(x) \leq f(a).$$

(ii) On dit que f admet un minimum local en a si :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]a-\delta, a+\delta[, f(x) \geq f(a).$$

(iii) On dit que f admet un extremum local en a si f admet un minimum local ou un maximum local en a.

Remarque. Si f admet un maximum (resp. minimum) en a sur D, alors a fortiori f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a.



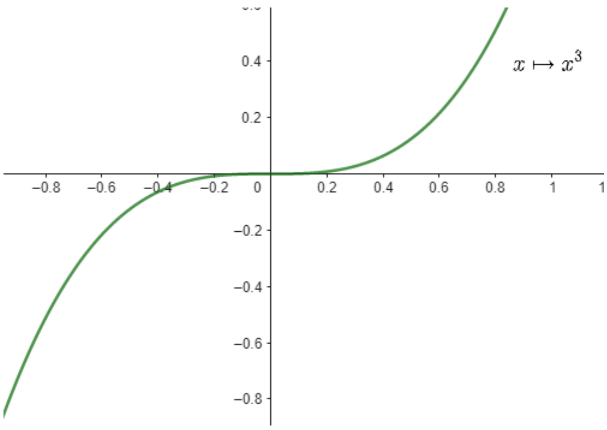
Proposition 43. **(Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1.)** *Soit I un intervalle. Soient f une fonction réelle définie sur I et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. On suppose f dérivable en a.*
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque. La condition "a n'est pas une extrémité de I" est nécessaire. Par exemple, $f : x \mapsto x$ admet un minimum en 0 sur l'intervalle $[0, 1]$, mais $f'(0) = 1$. Dessin à noter.

Démonstration. À noter. □

Remarque. L'interprétation graphique est importante : en un maximum local "intérieur" à I, la courbe de f admet une tangente horizontale (sa pente est nulle).

Remarque. Cette proposition donne une condition **nécessaire mais pas suffisante** pour avoir un extremum local. Exemple : $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local de cette fonction sur $\mathbb{R}$.



Remarque. Une condition suffisante sera donnée plus bas, à l'aide du théorème des accroissements finis.

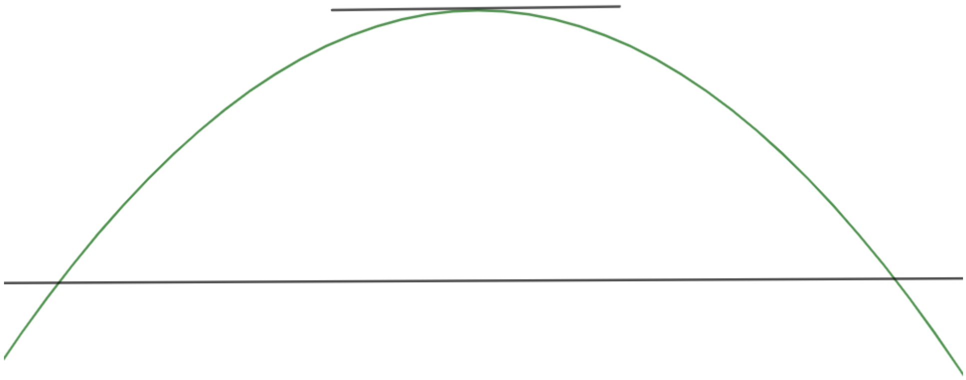
2. Le lemme de Rolle (HP)

Cet énoncé est légèrement hors programme et vous ne devriez pas être interrogé dessus, mais il est essentiel pour comprendre le cours dans sa continuité.

Proposition 44. **(Lemme de Rolle.)** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$. Alors :*

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

Démonstration. À noter. □

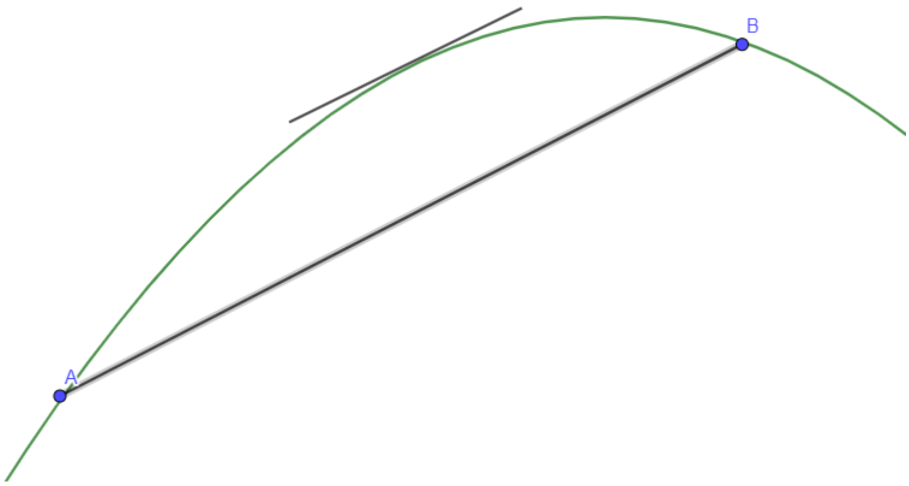


3. Le théorème des accroissements finis (HP)

Voici le théorème des accroissements finis.

Théorème 45. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :*

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

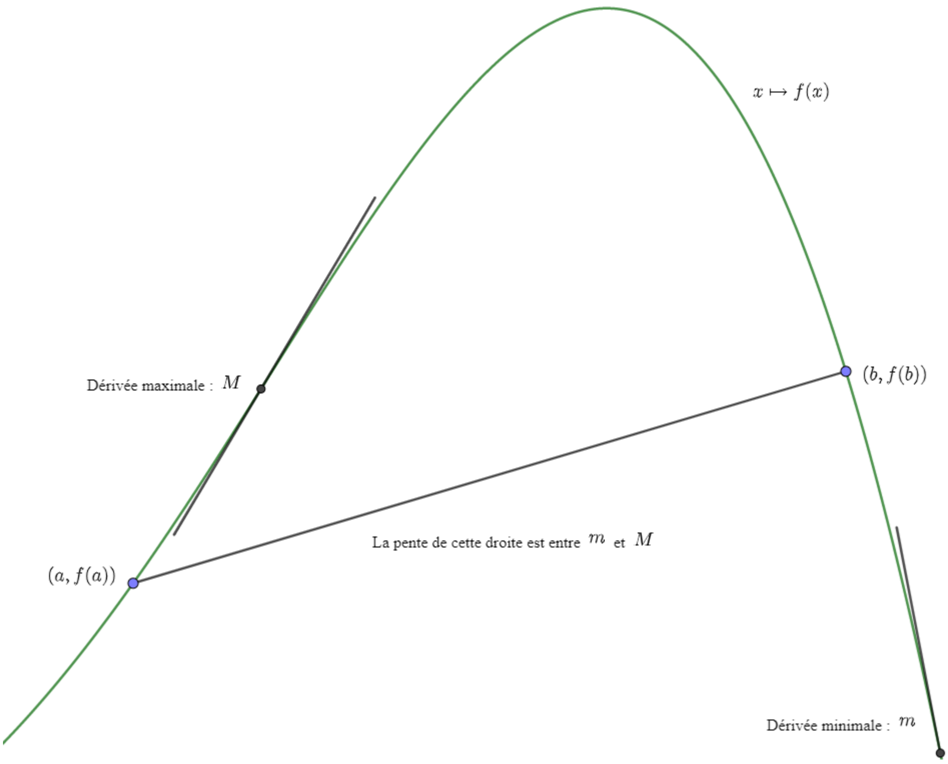


Démonstration. À noter. □

Remarque. C'est une version "penchée" du lemme de Rolle, et c'est exactement ce que traduit la démonstration.

4. L'inégalité des accroissements finis

Ce théorème et son corollaire au programme formalisent le fait suivant : si la fonction dérivée de f est majorée par M et minorée par m sur un intervalle, alors tous les taux d'accroissements de f sur cet intervalle sont majorés par M et minorés par m.



Proposition 46. ***(Inégalité des accroissements finis, version "HP")***
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M,$$

alors :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

Remarque. Si on ne sait que majorer ou que minorer la dérivée, on peut tout de même conclure à une inégalité. Plus précisément, si m est un minorant de f' sur $]a, b[$, alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(avec les notations de l'énoncé).

Démonstration. A noter. □

Voici la version explicitement au programme, aux hypothèses simplifiées :

Proposition 47. ***(Inégalité des accroissements finis)***
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Supposons l'existence d'un réel k tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Démonstration. A noter. □

L'inégalité des accroissements finis est un outil remarquable pour démontrer des inégalités. Pour cela, il faut "reconnaitre des taux d'accroissement".

Exemple 48. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exemple 49. Montrer que si a et b sont des réels tels que $a \leq b \leq -1$, alors

$$e^b - e^a \leq \frac{b-a}{e}$$

5. Applications de l'IAF à la monotonie.

Le lien entre la monotonie et la dérivée d'une fonction se démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 50. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :*

(i) La fonction f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

(ii) La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

(iii) La fonction f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration. A noter. Bien remarquer que seule l'implication “si f' est positive alors f est croissante” utilise l'IAF. □

Remarque. Attention : la proposition devient complètement fausse si on ne se place pas sur un intervalle. Penser à $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Pour la monotonie stricte, la “vraie” condition équivalente est plus subtile et n'est pas donnée. On se contente de cet énoncé.

Proposition 51. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$).*
Si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I, alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante sur I).

Démonstration. A noter. □

Remarque. Ainsi, on pourra justifier que f est strictement croissante sur I en vérifiant que l'inégalité $f'(x) > 0$ est vraie pour tout $x \in I$ sauf en un nombre fini de points (où la dérivée s'annulera dans ce cas - admis et non trivial dans le cas général). Et idem pour la stricte décroissante (avec $f'(x) < 0$).

Exemple 52. Cette proposition est utilisée depuis le début de l'année.

Exemple 53. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6. Une condition suffisante d'extremum local

Proposition 54. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I, et soit $a \in I$.*
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.
Autrement dit, s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

(i) $f'(a) = 0$,

(ii) $\forall x \in I \cap]a-\delta, a], f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$),

(iii) $\forall x \in I \cap [a, a+\delta[, f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$),

alors f admet un extremum local en a.

Remarque. Cette proposition justifie que le tableau de variation fait bien apparaitre les extrema locaux de f.

Remarque. Dans le contexte de la proposition, si f' passe de négative à positive en a, alors f admet un minimum local en a, et dans l'autre cas c'est un maximum local en a. Le tableau de variation rend cela très clair.

Démonstration. A noter. $\square$

Exemple 55. Déterminons les extrema locaux de $x \mapsto x^3 - x$.

7. Accroissements finis et étude de suites

L'exposé théorique est hors programme, mais les démarches expliquées sont explicitement au programme.

Définition 56. (HP). Soit f une application dérivable sur l'intervalle I. Soit $k \in [0, 1[$. On dit que f est k-contractante sur I si :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

On dit qu'une fonction dérivable f est contractante sur l'intervalle I s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que f soit k-contractante sur I.

Remarque. Il y a une définition plus générale de cette notion complètement hors programme.

Remarque. Pourquoi cette définition? D'après l'inégalité des accroissements finis, si f est k contractante, alors

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$

Autrement dit, les images $f(b)$ et $f(a)$ sont plus proches que a et b ne le sont, avec un facteur $k < 1$. Attention, il faut bien avoir $k < 1$ pour que la notion soit définie.

Ceci permet de démontrer la convergence de suites, selon la démarche (ici très guidée) de l'exemple suivant.

Exemple 57. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. *(On montre que f est $\frac{1}{2}$-contractante)*

(ii) Montrer qu'il existe un unique réel positif ϕ tel que $f(\phi) = \phi$. *(On introduit un point fixe de f)*

(iii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}$. *(On utilise l'IAF)*

(iv) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n}$. *(On itère la relation précédente, avec une récurrence)*

(v) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi$. *(Et on conclut!)*

Voici une autre version classique suivant une démarche proche, version "séries".

Exemple 58. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. *(Idem)*

(ii) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_n - u_{n-1}|}{2}$ *(On utilise l'IAF et la question précédente)*

(iii) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$ *(Encore une fois, on itère la relation précédente)*

(iv) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge *(On passe par la convergence absolue pour utiliser la question précédente)*

(v) En déduire que u converge. *(Routinier, série télescopique)*

(vi) Déterminer la limite de u. *(Ici, on doit trouver les (le) points fixes de f, avec l'argument d'unicité de la limite)*

Un peu de culture générale :

Proposition 59. *(Hors programme, non exigible, mais bon à savoir) Toute application dérivable contractante sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.*

Démonstration. Unicité : en exercice, accessible. Existence : admise mais facile quoi qu'un peu conceptuelle. En pratique, ne pas utiliser cette proposition, vous serez guidés pour faire sans. $\square$