III. Complément du TP 9 : Un exercice sur les graphes bipartis

Exercice 9

1. Rappeler la définition d'un graphe bipartis.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = [\![0, 2n-1]\!]$, $G_n = [\![0, n-1]\!]$, $D_n = [\![n, 2n-1]\!]$, et $A_n = \{\{i, j\}, i \in G_n, j \in D_n\}$. On pose enfin $K_{n,n} = (S_n, A_n)$. On dit que $K_{n,n}$ est un graphe bipartis complet : il est bipartis, et toute arête pouvant être présente sous cette condition l'est.

2. Représenter $K_{4,4}$. Donner sa matrice d'adjacence (avec la numérotation induite par les sommets) et sa liste d'adjacences.

3. Définir en Python, et sans rentrer ces données à la main, la matrice d'adjacence et la liste d'djacence de $K_{4,4}$.

4. Écrire une fonction `Python` d'entête `def MatriceBipartis(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie une liste des adjacences de $K_{n,n}$.

5. Écrire une fonction `Python` d'entête `def ListeBipartis(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie une liste des adjacences de $K_{n,n}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre d'arêtes de $K_{n,n}$?

7. Afficher, pour quelques valeurs de n et de manière lisible, les 6 premières puissances de la matrice d'adjacence de $K_{n,n}$.

8. Conjecturer un résultat portant sur la longueur des chaînes fermées de $K_{n,n}$.

9. Démontrer cette conjecture.

10. Conjecturer un résultat portant sur les chaînes de $K_{n,n}$ faisant intervenir la parité de leur longueur.

11. Démontrer cette conjecture.