Programme de colle n^o 21 : Dérivation, graphes, espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

*Semaine du lundi **18 mars**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Le cours sur les espaces vectoriels n'étant pas très avancé, les exercices pourront porter sur les graphes, la dérivation et les séries.

Théorie des graphes (Exercices uniquement)

21.1 Maths : Se reporter au programme de colle n°18.

La théorie des graphes revient cette semaine pour des exercices uniquement, pouvant mêler mathématique et informatique.

21.2 Python : représentations sous forme de liste d'adjacence ou de matrice d'adjacence, fonctions de conversions, algorithmes classiques utilisant la matrice d'adjacence (nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets, test de connexité, fonction "distance de graphe", exemples avec le graphe complet).

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

21.3 L'ensemble $\mathbb{R}^n$ et ses opérations $+$ et $\cdot$. Proposition et définition : structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}^n$. Règles de calcul supplémentaires découlant de la proposition précédente. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autres exemples d'espaces vectoriels (matrices, suites, polynômes, fonctions).

Les élèves ne sont pas attendus sur d'autres espaces vectoriels que $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le moment. La définition de la notion d'espace vectoriel à été légèrement simplifiée (pour les points portants sur l'existence d'un opposé et d'un élément neutre).

21.4 Notion de combinaison linéaire. Famille de vecteurs. Base d'un espace vectoriel. Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

21.5 Notion de sous-espace vectoriel. Caractérisation "en trois points" des sous-espaces vectoriels (démonstration lundi).

Quelques questions de cours

Peu de nouvelles questions de cours cette semaine, mais la colle commencera par l'une de ces méthodes, complétée éventuellement par une question de cours liée au programme de la semaine dernière, au choix du colleur.

1. Soit G un graphe non orienté, simple et possédant au moins une arête. On suppose G sans cycle. En admettant l'existence d'une chaîne simple (sans répétitions d'arêtes) de longueur maximale parmi celles-ci, montrer que G a au moins deux sommets de degré 1.
2. Donner les 8 propriétés calculatoires vérifiées par les opérations (usuelles) faisant de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel, ainsi que les 5 propriétés calculatoires qui en découlent (propositions 3 et 4). En démontrer quelques-unes, au choix du colleur.
3. Définir la notion de combinaison linéaire dans un espace vectoriel. Le vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivant est-il combinaison linéaire des vecteurs suivants? (au choix du colleur).
4. Définir la notion de base d'un espace vectoriel. La famille suivante est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? (au choix du colleur).
5. Définir la notion de coordonnées d'un vecteur dans une base. Donner les coordonnées du vecteur suivant dans la base suivante (au choix du colleur, qui pourra selon son choix demander à l'élève de démontrer que la famille donnée est une base, ou le faire admettre. *On se placera en dimension 3).*