TD de mathématiques n°17 : Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour commencer

Combinaisons linéaires

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (-1,2,0), v = (3,-5,-1), w = (0,1,-2)$ et $x = (0,1,0)$.

(a) Montrer que x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs u et v.

(b) Montrer que x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs u et w.

(c) Montrer que x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs v et w.

(d) Montrer de manière constructive que x est combinaison linéaire des vecteurs u, v et w.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,-3)$ et $w = (1,0,1)$.

(a) Le vecteur $x = (2,3,-9)$ (resp. $y = (0,0,4)$) peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u, v et w ? Si oui, comment?

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $z = (a,b,c)$ peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u, v et w ? Si oui, comment?

Exercice 3 Soit $k \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,k,2)$ et $v = (-1,8,k)$.

Pour quelle(s) valeur(s) du réel k le vecteur $x = (1,2,1)$ peut-il s'écrire comme combinaison linéaire de u et v?

Exercice 4 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(a) Calculer les combinaisons linéaires $3A - 5B$ et $-7A + B$.

(b) Est-il possible trouver une combinaison linéaire (autre que $0.A + 0.B$) de A et B égale au vecteur nul?

Sous-espaces vectoriels, familles génératrices

Exercice 5 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $F_1 = \{(x,x,-x), x \in \mathbb{R}\}$

(b) $F_4 = \{(x,y,|x+y|), x, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $F_2 = \{(x,2x,1-x), x \in \mathbb{R}\}$

(d) $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$

(e) $F_3 = \{(x,x-z,z), x, z \in \mathbb{R}\}$

(f) $F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 1-z\}$

Exercice 6 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

(a) $F_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) $F_4 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | 2x + y = 0\right\}$.

(c) $F_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) $F_5 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | 2x + y = 1\right\}$.

(e) $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

(f) $F_6 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | x^2 + y = 0\right\}$.

Exercice 7 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

(a) $F_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x + 2y + z = 0\right\}$.

(c) $F_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2x-y+z \\ -x+y-z \\ x+3y-2z \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) $F_4 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x^2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 8 Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-d \\ 3a+2c \\ -a+4d \\ b+2c+3d \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de F.

Exercice 9 Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{r} x+5y-3z=0 \\ -x-4y+2z=0 \end{array} \right. \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F.

Exercice 10 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\text{Vect}(A,B) = \text{Vect}(C,D)$.

Exercice 11 Soit $(E,+,)$ un espace vectoriel réel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Donner un exemple concret de situation pour laquelle $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

(c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E.

(d) On suppose que $F \subset G$. Montrer que $G \backslash F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Sous-espaces vectoriels, bases et familles libres

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1,1,0), v = (1,-1,0)$ et $w = (1,0,-1)$.

(a) Montrer que la famille (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer les coordonnées du vecteur $x = (2,5,-1)$ dans la base (u,v,w).

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (0,1,1), v = (2,0,-1)$ et $w = (2,1,1)$.

(a) Déterminer une base de Vect (u,v,w) extraite de la famille (u,v,w).

(b) Déterminer les coordonnées du vecteur $x = (2,0,-2)$ dans cette base.

Exercice 14 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que la famille (A,B,C) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base (A,B,C).

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $s = (0,0,1,-1), t = (0,1,0,-1), u = (0,2,-3,1), v = (0,1,-2,1)$ et enfin $w = (1,0,0,-1)$.

Déterminer une base de $\text{Vect}(s,t,u,v,w)$ extraite de la famille (s,t,u,v,w).

Exercice 16 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer une base de Vect $\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 17 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (1,a,2), v_2 = (a,1,2)$ et $v_3 = (1,2,a)$.

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de Vect (v_1, v_2, v_3).

Dimension et rang

Exercice 18 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z), x+3y-z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x+y-z = x-y+3z = 0\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

(b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

Exercice 19 Soient $t = (-1,2,0), u = (3,-5,-1), v = (0,1,-2)$ et $w = (1,-1,1)$.

(a) La famille $\mathcal{F} = (t,u,v,w)$ est-elle libre?

(*b*) Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (t, u, v, w)$.

Exercice 20 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $t = (1, 0, 2, 3), u = (0, 1, 2, 3), v = (1, 2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 0, 0)$.

Montrer que la famille (t, u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^4$ en utilisant un argument de dimension.

Exercice 21 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (A, B, C)$.

Exercice 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix}, F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = X\}$ et $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = -X\}$.

(*a*) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

(*b*) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda . X\}$.

(*a*) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(*b*) Pour quelle(s) valeur(s) de λ a-t-on $\dim(F) > 0$?

(*c*) Déterminer explicitement la valeur de $\dim(F)$ en fonction de la valeur de λ.

Pour continuer

Combinaisons linéaires

Exercice 24 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 2)$ et $v = (1, 1, -1)$.

(a) Le vecteur $w = (3, 1, 0)$ (resp. $x = (1, 5, -7)$, resp. $y = (-1, -3, 4)$, resp. $z = (-2, 1, 4)$) peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u et v ? Si oui, comment?

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $t = (a, b, c)$ peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u et v ? Si oui, comment?

Exercice 25 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, resp. $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, resp. $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $E = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$) peut-elle s'écrire comme une combinaison linéaire de U et V ? Si oui, comment?

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La matrice $F = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire comme une combinaison linéaire de U et V ? Si oui, comment?

Exercice 26 Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de A, B et C.

(b) Montrer que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de A, B et C.

Sous-espaces vectoriels, familles génératrices

Exercice 27 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit $E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0_{3,1}\}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = X\}$.

Les ensembles E et F sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 28 Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{r} x - 3y - z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ 3x - 7y + 5z = 0 \end{array} \right. \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F.

Exercice 29 Soient $t = (1, 1, -1), u = (1, 2, -4)$ et $F = \text{Vect}(t, u)$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}, v = (3, -1, a), w = (2, 3, b)$ et $G = \text{Vect}(v, w)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a et b a-t-on l'égalité $F = G$?

Sous-espaces vectoriels, bases et familles libres

Exercice 30 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $t = (0, 0, 1, 1), u = (0, 1, 0, 1), v = (1, 0, 1, 0)$ et $w = (1, 3, 3, 1)$.

(a) Montrer que la famille (t, u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 9, 3, 3)$ dans la base (t, u, v, w).

Exercice 31 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 32 Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Montrer que la famille (A, B, C, D) forme une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(*b*) Déterminer les coordonnées de la matrice $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans la base (A, B, C, D).

Exercice 33 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer une base de Vect $\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 34 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer une base de $\text{Vect}(A, B, C)$.

Exercice 35 Soit $(E, +, .) un \mathbb{R}$-espace vectoriel et $u_1, u_2, u_3 \in E$.

On suppose que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est une base de E.

(*a*) Montrer que la famille $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1)$ est une base de E.

(*b*) Montrer que la famille $(u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$ est une base de E.

Dimension et rang

Exercice 36 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(-2\alpha + \beta + \gamma, \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

Exercice 37 Soient $u = (1, 2, 0, 1), v = (0, 1, -1, 2)$ et $w = (2, -1, 1, 3)$.

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

Exercice 38 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on pose $F_i = \text{Vect}\,(e_i, e_1 + e_2 + e_3 - e_i)$. Enfin, on pose $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$.

(*a*) Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, déterminer $\dim\,(F_i)$.

(*b*) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(*c*) Montrer que $1 \leq \dim(F) \leq 2$.

(*d*) Déterminer $\dim(F)$.

Exercice 39 Dans $\mathbb{R}^n$, on considère $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on pose $u_i = e_i - e_1$.

(*a*) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(*b*) Montrer que pour tout $i \in [\![2, n]\!], u_i \in F$.

(*c*) Déterminer une base de F et la valeur de $\dim(F)$.

(*d*) Soit $u_1 \in \mathbb{R}^n \backslash F$. Montrer que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 40 Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer la valeur de $\dim(F)$.