Programme de colle n^o 22 : Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (suite).

*Semaine du lundi **25 mars**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Sous-espaces vectoriels

22.1 Notion de sous-espace vectoriel. Caractérisation "en trois points" des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Stabilité par combinaison linéaires des SEV.

22.2 L'ensemble des solutions de toute équation linéaire homogène à n inconnues est un SEV de $\mathbb{R}^n$. Toute intersection de SEV d'un espace vectoriel E est un SEV de E. L'ensemble des solutions de tout système linéaire homogène à n inconnues est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

22.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs : définition. Si F est un SEV d'un EV E et $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs de E, alors : $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \subset F$ ssi $u_i \in F$ pour tout i.

22.4 Base d'un sous-espace vectoriel. $(u_1, \ldots, u_k)$ forme une base de $\text{Vect}(u_1, \ldots u_k)$ si et seulement si $u_p \notin \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1}, u_{p+1}, \ldots, u_k)$ pour tout p. Conséquence si cette dernière condition n'est pas vérifiée pour un certain p : $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1}, u_{p+1}, \ldots, u_k)$.

Familles libres, familles génératrices d'un SEV, dimension

22.5 Notion de famille libre, et caractérisation des familles libres. Toute sous-famille d'une famille libre est libre (en exercice). Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre ssi $u_p \notin \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1}, u_{p+1}, \ldots, u_k)$ pour tout p.

22.6 Notion de famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. Une famille de vecteurs forme une base d'un sous-espace vectoriel F ssi c'est une famille libre et génératrice de F.

Attention à la faute immédiatement corrigée en cours dans la définition 52.

22.7 Proposition admise : Tout sous-espace vectoriel d'un EV (au programme) admet une base, et toutes ses bases sont de même cardinal. Notion de dimension. Rang d'une famille de vecteurs. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension k d'un espace vectoriel, alors toute famille libre de F est constituée d'au plus k vecteurs, et toute famille libre de k vecteurs de F est une base de F. Toute famille génératrice de F est constituée d'au moins k vecteurs, et toute famille génératrice de F de k vecteurs est une base de F (admises).

22.8 Inclusion et dimension.

Python

22.9 Méthodes numériques : approximation de solutions d'équations par balayage, par dichotomie ou par la méthode de Newton (à un niveau introductif pour celle-ci).

Quelques questions de cours

1. Soit F un ensemble et E un espace vectoriel. Montrer que si F vérifie la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels de E, alors F estun sous-espace vectoriel de E. On énoncera la proposition correspondante.
2. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que l'ensemble des solutions de toute équation linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. Énoncer et démontrer la proposition 38, relative aux inclusions de sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs dans un SEV.
5. Énoncer la définition de la notion de famille libre, et la caractérisation qui lui est jumelée. Démontrer cette caractérisation.
6. Montrer qu'une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre si et seulement si aucun des vecteurs u_p n'est dans l'espace vectoriel engendré par les autres $(1 \leq p \leq k)$ (proposition 50).
7. Énoncer et démontrer la proposition 66, liant la notion de dimension à l'inclusion de sous-espaces vectoriels. *Pas au programme pour les élèves passant lundi.*
8. Écrire un code python implémentant la méthode de recherche par balayage ou par dichotomie (choix du colleur) permettant d'obtenir une approximation à précision donnée d'une solution de l'équation suivante (choix du colleur). L'élève devra justifier de manière autonome que son algorithme est juste et termine.