Chapitre 18 : Intégrales d'une fonction continue sur un segment

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Aire sous la courbe et primitives

Dans de chapitre, on s'intéresse au calcul de l'aire formée par le graphe d'une fonction donnée entre deux points. On définit pour cela la notion d'intégrale définissant cette aire, en remarquant que le calcul de ces aires est intimement lié au calcul de primitives, une démarche "réciproque" de la dérivation.

1. Notion d'aire sous la courbe pour les fonctions continues sur un segment

On s'intéresse au calcul d'aires sous la courbe d'une fonction donnée. Cadrons un peu le problème.

- On va s'intéresser au calcul d'aires sous la courbe de fonction **continues**. C'est un bon cadre, car il est déjà assez fertile en résultats (voir : ce chapitre), et il nous permet d'éviter des complications considérables qui seraient nécessaires si l'on considérais des fonctions non continues.

  Par exemple, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ donnée par :

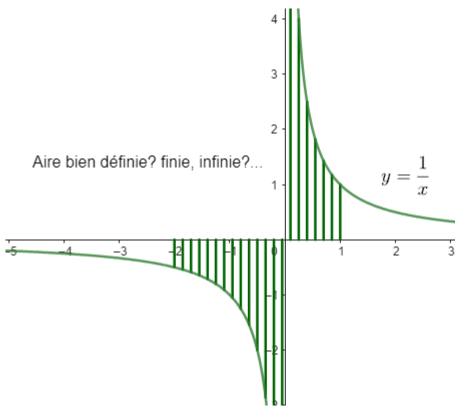
$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

  Elle n'est pas continue. Essayez de la représenter, et vous verrez que répondre à la simple question "quelle aire voudriez vous attribuer à la partie de la courbe entre 0 et 1?" est problématique.

- On va s'intéresser au calcul d'aires de fonctions continues sur **un intervalle**, et prendre ces aires sur **un segment** de l'intervalle.

  Cela se généralise plus tard (cette année et en 2e année) mais avec des complications. Pour l'instant, on en reste à une première étude en évitant les problèmes qui peuvent apparaitre dans un cadre plus large.

  Par exemple, pour la fonction inverse représentée ci-dessous, les aires de -2 à 1 ou de 0 à 1 sembles plus compliquées à appréhender. Dans le premier cas, $[-2, 1] \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle. Dans le second cas, la fonction est définie sur $]0, 1]$ et y est continue, mais $]0, 1]$ n'est pas un segment.



- On va s'intéresser à la notion d'aire **orientée** sous la courbe d'une fonction. C'est une hypothèse nécessaire pour que la théorie fonctionne bien, ce dont ce chapitre témoigne. Et ce n'est pas vraiment contraignant. Nous reviendrons de suite sur ce point.

La démarche dans la suite la suivante :

- On procède à une analyse du problème. On suppose l'existence d'une fonction "aire orientée sous la courbe".
- On étudie les propriétés de cette fonction pour la comprendre.
- On définit la notion d'intégrale d'une fonction entre deux points à partir de cette étude pour formaliser correctement cette notion d'aire.

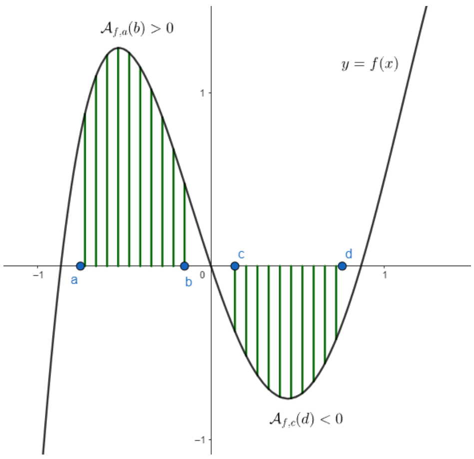
On admet que cette notion d'aire est bien définie.

Proposition 1. (et définition.) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. On admet l'existence d'un réel noté $\mathcal{A}_f(a,b)$, désignant l'aire orientée sous la courbe de f entre les points d'abscisse a et b.*
On définit ainsi la fonction "aire orientée sous la courbe de f" (à partir de a) :

$$\mathcal{A}_{f,a} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{A}_f(a,x) \end{array} \right. .$$

L'aire est **orientée**, ce qui signifie qu'elle est "signée" selon l'orientation de l'aire considérée. On choisit l'orientation "de droite à gauche, de haut en base". Cela signifie que :

- L'aire sous la courbe d'une fonction négative est comptée négativement.

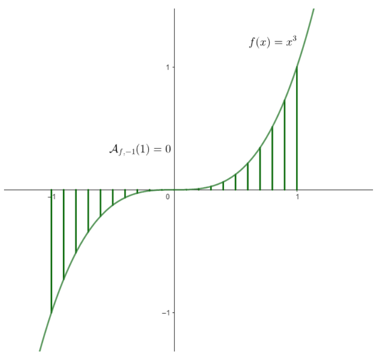


- L'ordre des "bornes" compte. On aura dès que ces symboles sont définis :

$$\mathcal{A}_f(a,b) = -\mathcal{A}_f(b,a).$$

  Par exemple, dans le dessin ci-dessus, $\mathcal{A}_{f,d}(c) = -\mathcal{A}_{f,c}(d) > 0$.

- Une conséquence , des phénomènes de compensation peuvent apparaitre.



Cette considération d'une aire orientée permet d'avoir des règles de calcul plus pratiques à énoncer.

Proposition 2. **(Relation de Chasles, version "aire orientée".)** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, pour tous points a, b et c de I :*

$$\mathcal{A}_f(a,c) = \mathcal{A}_f(a,b) + \mathcal{A}_f(b,c).$$

Démonstration. Admise, car fait partie des propriétés intuitives qu'on veut avoir pour une notion d'aire orientée. Illustration à noter. Il faut cependant remarquer que si l'aire n'était pas orientée, cette relation ne serait valable que sous des contraintes comme $a \leq b \leq c$ à priori. $\square$

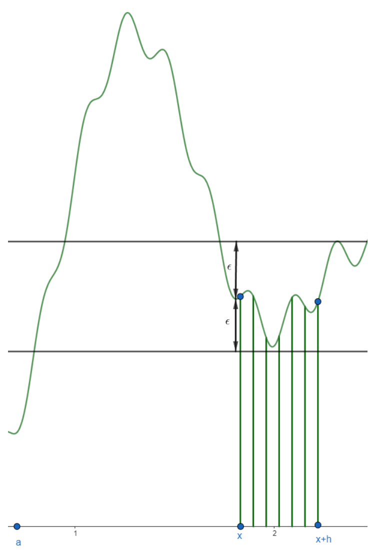
2. Lien avec la notion de primitive

Reprenons notre étude de la fonction "aire sous la courbe" (**toujours orientée dans la suite**).

Proposition 3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Alors, la fonction $\mathcal{A}_{f,a}$ est dérivable sur I, et :*

$$\forall x \in I, (\mathcal{A}_{f,a})'(x) = f(x).$$

Démonstration. Reprenons les notations de l'énoncé.
Soit $x \in I$.
Montrons que : $\mathcal{A}_{f,a}$ est dérivable en x et $(\mathcal{A}_{f,a})'(x) = f(x)$.
Par définition, il faut pour cela montrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.



Intéressons nous au numérateur $\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)$. D'après la relation de Chasles :

$$\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x) = \mathcal{A}_f(x, x+h)$$

est l'aire sous la courbe de f entre les points d'abscisse x et $x+h$.

L'idée est de démontrer que cette aire vaut environ $hf(x)$ et de conclure à une égalité pour le taux d'accroissement ci-dessus.

Soit $\epsilon > 0$. f étant continue en x, $f(t) \xrightarrow[t \to x]{} f(x)$. Par définition, il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \cap]x-\delta, x+\delta[, |f(t) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Soit $h \in]-\delta, \delta[$ tel que $x+h \in I$. Alors, pour tout $t \in [x, x+h]$, on a $t \in I \cap]x-\delta, x+\delta[$ donc $f(x) - \epsilon \leq f(t) \leq f(x) + \epsilon$.

L'aire désignée par $\mathcal{A}_f(x, x+h)$ est donc comprise entre les deux rectangles de base commune $[x, x+h]$ et de hauteurs $f(x) - \epsilon$ et $f(x) + \epsilon$. On en déduit sans trop de difficultés (en prenant en compte le signe de h) que si de plus $h \neq 0$:

$$f(x) - \epsilon \leq \frac{\mathcal{A}_f(x, x+h)}{h} \leq f(x) + \epsilon.$$

Donc :

$$f(x) - \epsilon \leq \frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h} \leq f(x) + \epsilon.$$

On a donc démontré que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in]-\delta, \delta[$ tel que $\frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h}$ soit défini :

$$|\frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h} - f(x)| \leq \epsilon.$$

C'est exactement la définition de :

$$\frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x),$$

d'où le résultat. □

On va maintenant se rendre compte que cet énoncé caractérise l'aire orientée sous une courbe, et la définir plus proprement ainsi.

3. Notion de primitive

Définition 4. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de f sur I* toute fonction réelle F définie et dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Exemple 5. À noter.

On admettra ce théorème d'existence de primitive pour les fonctions continues.

Proposition 6. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, alors il existe une primitive de f sur I.*

Démonstration. Théorème admis. Il faudrait, pour le démontrer, construire proprement et formellement la fonction "aire sous la courbe" du paragraphe précédent, et montrer qu'elle fournit une primitive.
□

Remarque. Dans beaucoup de cas, on n'a pas besoin de recourir à ce théorème, mais il est indispensable pour les démonstrations de ce chapitre.

Exemple 7. On peut donner facilement une primitive de $x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}$ (comme $x \mapsto e^x + \frac{x^2}{2} + 1$).
En revanche, des fonctions continues aussi simples que $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admettent des primitives (par le théorème ci-dessus), mais dont on ne peut pas donner une expression avec les fonctions dites "usuelles" (c'est un théorème plus compliqué). On se contente donc de leur existence.

Proposition 8. (Théorème de structure des primitive d'une fonction sur un intervalle.)
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
Supposons qu'il existe une primitive F de f sur l'intervalle I.
Alors,

(i) Pour tout réel C, la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.
(ii) Si G est une primitive de f sur I, alors il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + C.$$

Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement donnée sur I par :

$$x \mapsto F(x) + C,$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 9. À noter.

En particulier, pour les fonctions continues, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 10. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.*
Supposons f continue sur I.
Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive $F : I \to \mathbb{R}$ de f sur I telle que :

$$F(x_0) = y_0.$$

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 11. Illustration à noter : ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 12. On pourrait maintenant définir la fonction ln comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ telle que $\ln(1) = 0$.

Comme on va lier la notion d'aire à la recherche de primitive d'une fonction continue sur un intervalle, on va apprendre à déterminer la primitive de certaines fonctions "sympathiques" à partir des règles connues sur l'opération de dérivation.

Il y a quelques habitudes à prendre.

Exemple 13. Donner une primitive des fonctions suivantes, en indiquant un intervalle d'étude convenable.

(*i*) $x \mapsto e^{\alpha x}$, pour α réel fixé.

(*ii*) $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

(*iv*) $x \mapsto \dfrac{1}{3x}$

Exemple 14. Déterminons une primitive des fonctions continues suivantes, sur un intervalle à préciser.

(*i*) $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

(*ii*) $x \mapsto 2xe^{-x^2}$

(*iii*) $x \mapsto 3x^7 + e^x$

4. Calculs de primitive "à vue"

C désigne une constante réelle, la colonne "$F(x)$" désigne la forme des primitives de la colonne "$f(x)$" sur un intervalle d'étude I.

$f(x)$	$F(x)$	Domaine I ou conditions
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq -2$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln(-x) + C$	$\mathbb{R}_-^*$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$a^x, a > 0$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(x) + \beta G(x) + C$	F et G primitives resp. de f et g sur I
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + C$	$u(x) > 0$
$u'(x)u(x)$	$\dfrac{(u(x))^2}{2} + C$	(u dérivable sur I, omis dans la suite)
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\dfrac{1}{u(x)} + C$	$u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))}}$	$2\sqrt{u(x)} + C$	$u(x) > 0$
$u'(x)(u(x))^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$	
$u'(x)(u(x))^n, n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq -2$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$
$u'(x)(u(x))^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u(x) > 0$
$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$	

Remarque.

$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert) + C$	$u(x) \neq 0$

: Si u est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors u est de signe constant sur I. On peut donc dire que $x \mapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I pour signifier que :

(i) si u est (strictement) positive sur I, la primitive donnée est $x \mapsto \ln(u(x))$,

(ii) si u est (strictement) négative sur I, la primitive donnée est $x \mapsto \ln(-u(x))$.

Exemple 15. Déterminons les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser.

(i) $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ (ii) $x \mapsto x^2 e^{x^3}$ (iii) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^n}{x}$

II. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. D'après notre analyse du problème, si une fonction "aire orientée sous la courbe" (à partir de a) $\mathcal{A}_{f,a}$ existe, alors c'est une primitive de f sur I.

Soient x et y deux points de I. D'après la relation de Chasles et le caractère orienté de l'aire :

$$\mathcal{A}_f(x,y) = \mathcal{A}_f(x,a) + \mathcal{A}_f(a,y) = -\mathcal{A}_f(a,x) + \mathcal{A}_f(a,y)$$

donc :

$$\mathcal{A}_f(x,y) = \mathcal{A}_{f,a}(y) - \mathcal{A}_{f,a}(x).$$

L'idée dans la suite est juste de remarquer que la quantité $F(y) - F(x)$ ne dépend pas de la primitive F de f considérée, et de définir ainsi cette notion d'aire sous la courbe entre deux points x et y, que l'on nomme alors intégrale de f entre x et y.

Définition 16. (et proposition.) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.

(i) Soit F une primitive de f sur I. Alors, le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f sur $[a,b]$ choisie. Autrement dit, G est aussi une primitives de f sur I, alors :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

(ii) On appelle *intégrale de f entre a et b* le réel noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ donné par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$.

(iii) On dit que f est *l'intégrande* de l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On dit que les réels a et b sont les bornes de cette intégrale. Dans les calculs, la différence $F(b) - F(a)$ est indiquée par le symbole suivant :

$$[F(t)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Dans la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, la variable t est une variable locale.

Remarque. On pense donc à l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ comme à l'aire orientée $\mathcal{A}_f(a,b)$, et on passe par la recherche de primitive pour calculer ces intégrales, à priori.

Remarque. Avec ses notations, la définition de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ considère une primitive de f sur $[a,b]$, mais en général on dispose d'une primitive de f sur un intervalle de continuité I plus grand que $[a,b]$. Ce n'est nullement une complication : si F est une primitive de f sur I, alors c'est aussi une primitive de f sur $[a,b]$. En pratique, on justifie que la fonction F donnée est une primitive de f sur un intervalle contenant $[a,b]$.

Exemple 17. Déterminons la valeur des intégrales suivantes

(i) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_0^4 e^{-x}\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int_{-2}^2 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

Exemple 18. (et proposition.) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Que dire de $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x$?

2. Le théorème fondamental de l'analyse

Voici un théorème appelé le théorème fondamental de l'analyse. Il est une synthèse du lien entre la démarche initiale de comprendre le calcul d'aire sous une courbe, et le calcul de primitive.

Théorème 19. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
Alors, la fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.*

Démonstration. À noter. □

3. Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Relation de Chasles, orientation

Proposition 20. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Alors :*

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 21. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 \text{ si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 \text{ sinon} \end{cases}$. On peut démontrer que f est (définie et) continue sur $\mathbb{R}$.

Calculons $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 22. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. À noter. □

b) Intégration et parité

Proposition 23. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur le segment $[-a,a]$.*
Si f est paire sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
Si f est impaire sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Démonstration. et illustration : À noter. □

c) Linéarité de l'intégrale

Proposition 24. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. Alors, pour tous réels λ et μ :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. On démontrera bientôt qu'une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par

$$t \mapsto t\ln(t) - t.$$

Exemple 25. Calculons $\displaystyle\int_0^2 2x^2 + e^x \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^e (1+\frac{1}{x})\ln(x)\mathrm{d}x$.

d) Positivité et croissance de l'intégrale

Proposition 26. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.*
Supposons f positive sur $[a,b]$. Alors :

(i) Si $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ (positivité de l'intégrale).

(ii) Si $a \leq b$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$ (positivité stricte de l 'intégrale).

Démonstration. À noter. □

Remarque. Avec ces notations, et dans le cas $b \leq a$, si f est positive sur le segment $[b,a]$ d'extrémités a et b, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \leq 0$. Ainsi, en appliquant cette proposition à un changement de bornes près, on peut toujours conclure quelque chose si $b \leq a$.

Une conséquence, la propriété de croissance de l'intégrale (on parle aussi d'intégration des inégalités) :

Proposition 27. *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.*
Si : $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x)$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 28. Étudions la limite de la suite $(I_n)_n$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

On utilisera un encadrement et l'inégalité : $\forall t \geq 0, \ln(1=t) \leq t$.

e) L'inégalité triangulaire

Proposition 29. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$.*
Si $a \leq b$, alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

III. Techniques de calcul intégral

1. L'intégration par partie

Proposition 30. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. Alors :*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 31. Calculons $\displaystyle\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

Remarque. Méthode : Lorsqu'on utilise cette proposition pour calculer une intégrale, on dit qu'on procède à une intégration par partie. Face à une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, pour utiliser cette proposition :

- On cherche à exprimer f sous la forme d'un produit de fonctions $f = uv$, et on constate le nombres de manières différentes selon laquelle cette étape peut être réalisée.
- On se demande, pour les décompositions trouvées, si on est capable d'intégrer à vue l'un des facteurs (dans la proposition, avec ses notations, il faut être capable d'intégrer u' pour utiliser l'égalité de droite à gauche).
- On se demande, lorsque c'est le cas, si l'intégrale restante est plus simple à calculer. Si la réponse est oui, on procède à l'intégration par partie.

Exemple 32. On souhaite calculer les intégrales suivantes. Voyons quelles possibilités on a pour une intégration par partie.

(i) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\mathrm{d}x$

Exemple 33. Le coup du 1, le retour Parfois, on procède à une intégration par partie en prenant 1 comme facteur.

Calculons, pour $x > 0$ réel, $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 34. Parfois, on procède à plusieurs IPP à la suite. C'est souvent le cas quand une IPP permet de faire baisser le degré d'un facteur polynomial "indésirable".

Calculons $\displaystyle\int_1^2 x^2e^x\mathrm{d}x$.

2. Le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 35. *Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I.*
Soit J un intervalle et $u : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Alors,

$$\forall (a,b) \in J^2, \int_a^b f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 36. Calculons $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variables "$t = \sqrt{x}$".

Remarque. **Méthode :** Lorsqu'on utilise cette proposition dans un sens ou dans l'autre, on dit qu'on procède au changement de variable "$x = u(t)$", avec les notations de l'énoncé pour les variables locales utilisées. *Comme pour un changement de variable dans une somme, c'est un des rare moment où, pour expliquer notre démarche, on manipule des variables locales comme si elles ne l'étaient pas.*

On procède alors en trois temps pour former la nouvelle intégrale obtenue.

(i) Changement de bornes : on explicite $u(a)$ et $u(b)$ pour préparer le changement de bornes de la nouvelle intégrale.

(ii) Changement de "différentielle" : on a l'habitude (pour des raisons géométriques historiques) de transformer le symbole $\mathrm{d}x$ en le symbole $u'(t)\mathrm{d}t$, lorsqu'on pose $x = u(t)$.

On peut alors écrire : $x = u(t)$ donc $\mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Changement de "formule" : on explicite le fait que $f(x) = f(u(t))$.

Exemple 37. (i) Calculons $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = \sqrt{x}$".

(ii) Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = e^x$"

Remarque. D'après le programme officiel, vous devez être autonome sur les changements de variable dits affines, c'est à dire de la forme $y = \lambda x + \mu$ (λ, μ réels fixés). Ils sont assez simples à reconnaitre.

Exemple 38. Calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\mathrm{d}x$.

Exemple 39. Calculons $\displaystyle\int_1^2 xe^{3x+1}\mathrm{d}x$.

3. Intégrales fonctions de leur borne

On étudie souvent des fonctions définies par une intégrale, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 40. On considère la fonction ϕ définie par $\phi(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$.

(i) Déterminer le domaine de définition de ϕ.

(ii) Justifier que ϕ est dérivable sur son domaine de définition, et calculer F'.

(iii) Montrer que ϕ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.

(iv) Déterminer la limite de ϕ en 0.

(v) Tracer brièvement le graphe de l'intégrande $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$. Que déduire de la limite précédente sur l'aire sous la courbe de cette fonction entre 0 et 1?

Exemple 41. Déterminer le domaine de dérivabilité, et calculer la dérivée de la fonction donnée par :

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^4}\mathrm{d}t.$$