Lycée Hoche
ECG1A

2023-2024
Mathématiques

Correction : Interro 6 - corrigé détaillé

Interro du 2/02

Les commentaires expliquant la démarche sont en italiques.

Exercice 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Démontrer :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x^2) > 1\right) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) > 1\right).$$

On se fait quelques raccourcis pour faciliter la rédaction

Notons $P : \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x^2) > 1$, et $Q : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) > 1$.

Déclaration d'intention (clarté)

Montrons $P \iff Q$ par double implication.

idem

(i) Montrons $Q \implies P$.

On démontre cette implication par l'approche directe.

Supposons Q, montrons $P : \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x^2) > 1$.

Pour montrer un énoncé type "$\forall x \in \mathbb{R}^*, P(x)$", on considère un élément x de $\mathbb{R}^*$ fixé de manière quelconque, et on cherche à montrer $P(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrons $f(x^2) > 1$.

Ici, on cherche un idée pour montrer $f(x^2) > 1$. On doit utiliser Q à priori, qui nous donne une conclusion du type voulu. Il faut vérifier qu'on peut bien appliquer Q.

Or $x \neq 0$ donc $x^2 \in \mathbb{R}_+^*$ (car tout carré est positif).

On applique $Q : \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) > 1$ au réel x^2, ici fixé.

D'après $Q : \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) > 1$. En particulier,$x^2 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $f(x^2) > 1$.

On conclut.

On a donc bien montré $P : \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x^2) > 1$, d'où $P \implies Q$.

(ii) Montrons $P \implies Q$.

Avec un tout petit peu moins de détails, mais suivant les mêmes principes.

Supposons P et montrons Q.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons $f(x) > 1$.

P nous donne une conclusion "de la forme" $f(t^2) > 1$, et on veut $f(x) > 1$. Peut on écrire x sous la forme d'un carré? oui.

On pose $t = \sqrt{x}$ ($x > 0$ par hypothèse). Alors, $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x = t^2$.

On a donc $t \in \mathbb{R}^*$. D'après P, $f(t^2) > 1$. Donc $f(x) > 1$.

On a bien démontré Q, d'où la seconde implication.

Exercice 2 *Soient A et B deux matrices. Sans justification, quantifier convenablement les matrices A et B pour pouvoir compléter l'énoncé suivant, et le compléter :*

$$\forall (n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Exercice 3 *Une pièce déséquilibrée tombe sur pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boule verte. Une urne U_2 contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On lance la pièce, et on tire simultanément deux boules dans l'urne U_1 si la pièce fait pile, et dans l'urne U_2 sinon. On note en résultat les boules obtenues. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant cette expérience.*

Déterminer la probabilité de tirer 2 boules vertes (en fonction de p).

On définit les événements nous permettant de nous exprimer.

Soit P l'événement "la pièce tombe sur pile" et V l'événement "les deux boules tirées sont vertes.

Expérience "en deux étapes : on veut appliquer la FPT. On prépare le terrain sous oublier d'hypothèse.

Alors, $(P, \bar{P})$ est un système complet d'événement, et $\mathbb{P}(P) = p > 0$, $\mathbb{P}(\bar{P}) = 1 - p > 0$ car $p < 1$. Ces probabilités sont non nulles : d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(V) + \mathbb{P}(\bar{P})\mathbb{P}_{\bar{P}}(V).$$

On calcule les probabilités conditionnelles, qui nous manquent.

Or, $\mathbb{P}_P(V)$ est la probabilité de tirer deux boules vertes dans l'urne U_1 contenant 2 boules vertes sur un total de 5 boules. Les boules étant supposées indiscernables, ce tirage se fait en situation d'équiprobabilité. Il y a $\binom{2}{2} = 1$ tirage de ces 2 boules vertes, sur $\binom{5}{2} = 10$ tirages possibles dans U_1, d'où :

$\mathbb{P}_P(V) = \dfrac{1}{10}$.

Par un raisonnement similaire avec l'urne U_2 : $\mathbb{P}_{\bar{P}}(V) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{3}{28}$.

Finalement,

$$\mathbb{P}(V) = p\frac{1}{10} + (1-p)\frac{3}{28} = \frac{3}{28} - p\frac{1}{140}$$

— *Fin du corrigé* —