Correction : Interro 7

Interro du 8 février

Exercice 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer avec un bon niveau de détail :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n) \iff (\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = ku_{k-1}).$$

Notons $P : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n$ et $Q : \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = ku_{k-1}$, et montrons $P \iff Q$ par double implication.

Montrons $P \implies Q$. supposons P, montrons Q.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons $u_k = ku_{k-1}$. Posons $n = k-1$. Alors, $k \in \mathbb{N}^*$ donc $n \in \mathbb{N}$.

Mais d'après $P : \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = (m+1)u_m$. Cet énoncé donne donc :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n$$

en écrivant $k = n+1$, on trouve bien :

$$u_k = ku_{k-1}.$$

Ceci démontre bien l'énoncé voulu, d'où $P \implies Q$.

Montrons $Q \implies P$. supposons Q et montrons $P : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $k = n+1$. Alors, $k \in \mathbb{N}^*$. D'après Q, on a donc:

$$u_k = ku_{k-1}$$

Donc en écrivant $n = k-1$, il vient :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n$$

Ceci démontre $P : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n$.

On a donc bien démontré $Q \implies P$, d'où la second implication, puis l'équivalence voulue.

Exercice 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$ entier) vérifiant :*

$$A^3 - 2A^2 + A + 3I_n = 0_n.$$

Démontrer précisément que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A.

On réécrit la relation sous la forme :

$$A^3 - 2A^2 + A = -3I_n$$

d'où :

$$(A^2 - 2A^2 + I_n)A = -3I_n$$

et enfin :

$$\frac{-1}{3}(A^2 - 2A^2 + I_n)A = I_n$$

Par conséquent, $\frac{-1}{3}(A^2 - 2A^2 + I_n)$ est inverse à gauche de A. Par théorème, A est donc inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{-1}{3}(A^2 - 2A^2 + I_n)$.

Exercice 3 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.*
2. ***En déduire** les solutions du système*

$$(S) : \begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + z = 2m \end{cases}$$

en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

On utilisera la forme matricielle de ce système.

1.Soit $(y_1, y_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$. Considérons le système linéaire (S) de forme matricielle

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \begin{cases} x_1 \ - x_3 = y_1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

A l'aide du pivot de Gauss, on trouve que (S) est de Cramer, et que :

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 = -y_1 - y_2 + 3y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_3 = -2y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

On en tire que :

M est inversible, et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. La forme matricielle de ce système est :

$$MX = B$$

où $B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'inconnue.

Or, M étant inversible :

$$MX = B \iff X = M^{-1}B.$$

Ainsi, l'unique solution de ce système est le triplet (x_1, x_2, x_3) donné par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m - 1 \\ 1 - 2m \\ 4m - 1 \end{pmatrix}$$

donc le triplet $(5m - 1, 1 - 2m, 4m - 1)$.

Remarque. Une fois une matrice carrée M inversée (si elle est inversible), on peut résoudre immédiatement tout système linéaire de matrice associée M immédiatement. Pas de magie là dedans : notre démarche pour inverser M revient à résoudre un système linéaire de matrice associée M à second membre indéterminé, donc en fait, on traite "tous les seconds membres en une fois" dans ce processus.

— *Fin du corrigé* —