Lycée Hoche
ECG1 A
NOM :

2023-2024
Mathématiques

Interrogation n°8 - Corrigé

Le 21 mars 2024

Exercice 1

Montrons : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \iff \forall y < 0, x > y)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons : $x \geq 0 \iff \forall y < 0, x > y$.
On procède par double implication. Montrons d'abord $x \geq 0 \implies \forall y < 0, x > y$.
Supposons $x \geq 0$. Alors, pour tout réel $y < 0$, $y < 0$ et $0 \leq x$ donc, par transitivité, $y < x$.
Ceci démontre $x \geq 0 \implies \forall y < 0, x > y$.

Montrons maintenant la réciproque.
Supposons P : $\forall y < 0, x > y$, et montrons $x \geq 0$.
Supposons par l'absurde $x < 0$.
Alors, $\frac{x}{2} < 0$ car $x < 0$ (règle des signes) donc, d'après P, on aurait $\frac{x}{2} < x$.
On aurait donc $0 < x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, ce qui est absurde car $\frac{x}{2} < 0$.
On a bien démontré $x \geq 0$ sous l'hypothèse : $\forall y < 0, x > y$,
d'où la réciproque, puis l'équivalence voulue.

Exercice 3

(a)

(b) V est la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ car la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(c) Montrons que V est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrons :

$$\exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, X = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Soient a, b et c des réels.

$$\begin{aligned} X = av_1 + bv_2 + cv_3 &\iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c\\b+c\\c\end{pmatrix} \\ &\iff (T)\begin{cases} a+b+c = x_1 \\ b+c = x_2 \\ c = x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système obtenu (T) d'inconnue (a, b, c) est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls, donc est de Cramer. Ainsi, il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ solution de (T) donc par équivalence, il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$X = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Ce résultat étant vrai pour tout vecteur X de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, V est une base de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Remarque : si vous n'aviez pas vu que (T) est triangulaire inférieur, sa résolution était très simple ("remontée vers le bas").