

# Programme de colle n° 23 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Semaine du lundi 1 avril.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

## Aire sous la courbe, notion de primitive

**23.1** Motivation : on admet l'existence d'une fonction "aire orientée sous la courbe" d'une fonction donnée  $f$  continue sur un intervalle, et on montre que cette fonction est dérivable de dérivée  $f$ .

**23.2** Primitive d'une fonction sur un intervalle. Théorème admis : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Théorème de structure des primitives d'une fonction sur un intervalle. Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors pour tout  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

**23.3** Techniques de calcul de primitives "à vue" (primitives usuelles et formes usuelles).

## Intégrale d'une fonction continue sur un segment

**23.4** Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Bornes et intégrande d'une intégrale, notation "crochet". Théorème fondamental de l'analyse.

**23.5** Propriétés élémentaires : relation de Chasles, orientation de l'intégrale. Intégration et parité/imparité. Linéarité de l'intégrale. Positivité, positivité stricte et croissance de l'intégrale (ou "intégration des inégalités"). Inégalité triangulaire.

## Techniques de calcul intégral

**23.6** Intégration par partie. Exemples, dont "le coup du 1", un calcul par IPP successives et une IPP donnant une relation algébrique sur une intégrale à calculer.

**23.7** Le changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$ . Exemples.

**23.8** Exemples d'intégrales fonctions de leur borne(s).  
**Python**

**23.9** Méthodes d'approximation numérique.

*Tous les changements de variables non affines doivent être indiqués par l'énoncé.*

## Quelques questions de cours

- Définir la notion de primitive d'une fonction sur un intervalle. Définir, en contextualisant,  $\int_a^b f(t)dt$ . Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.
- Énoncer et démontrer le théorème de structure des primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Représenter les primitives de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Énoncer et démontrer le théorème (10) assurant l'existence et l'unicité d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle passant par un point donné.
- Énoncer et démontrer la relation de Chasles et le caractère orienté de l'intégrale (prop. 20 et 22).
- Énoncer et démontrer la propriété de linéarité de l'intégrale.
- Énoncer les résultats de positivité et de positivité stricte de l'intégrale. Démontrer le résultat de positivité.
- Énoncer et démontrer la propriété de croissance de l'intégrale.
- Énoncer le théorème d'intégration par partie, et calculer  $\int_1^x \ln(t)dt$  pour tout réel  $x > 0$ . En déduire une primitive du logarithme sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Énoncer et démontrer le théorème de changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$ . Donner la version "bijective" donnée en remarque.