

Programme de colle n° 23 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Semaine du lundi 1 avril.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Aire sous la courbe, notion de primitive

23.1 Motivation : on admet l'existence d'une fonction "aire orientée sous la courbe" d'une fonction donnée f continue sur un intervalle, et on montre que cette fonction est dérivable de dérivée f .

23.2 Primitive d'une fonction sur un intervalle. Théorème admis : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Théorème de structure des primitives d'une fonction sur un intervalle. Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique primitive $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

23.3 Techniques de calcul de primitives "à vue" (primitives usuelles et formes usuelles).

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

23.4 Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Bornes et intégrande d'une intégrale, notation "crochet". Théorème fondamental de l'analyse.

23.5 Propriétés élémentaires : relation de Chasles, orientation de l'intégrale. Intégration et parité/imparité. Linéarité de l'intégrale. Positivité, positivité stricte et croissance de l'intégrale (ou "intégration des inégalités"). Inégalité triangulaire.

Techniques de calcul intégral

23.6 Intégration par partie. Exemples, dont "le coup du 1", un calcul par IPP successives et une IPP donnant une relation algébrique sur une intégrale à calculer.

23.7 Le changement de variable de classe \mathcal{C}^1 . Exemples.

23.8 Exemples d'intégrales fonctions de leur borne(s).
Python

23.9 Méthodes d'approximation numérique.

Tous les changements de variables non affines doivent être indiqués par l'énoncé.

Quelques questions de cours

- Définir la notion de primitive d'une fonction sur un intervalle. Définir, en contextualisant, $\int_a^b f(t)dt$. Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.
- Énoncer et démontrer le théorème de structure des primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Représenter les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* . Énoncer et démontrer le théorème (10) assurant l'existence et l'unicité d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle passant par un point donné.
- Énoncer et démontrer la relation de Chasles et le caractère orienté de l'intégrale (prop. 20 et 22).
- Énoncer et démontrer la propriété de linéarité de l'intégrale.
- Énoncer les résultats de positivité et de positivité stricte de l'intégrale. Démontrer le résultat de positivité.
- Énoncer et démontrer la propriété de croissance de l'intégrale.
- Énoncer le théorème d'intégration par partie, et calculer $\int_1^x \ln(t)dt$ pour tout réel $x > 0$. En déduire une primitive du logarithme sur \mathbb{R}_+^* .
- Énoncer et démontrer le théorème de changement de variable de classe \mathcal{C}^1 . Donner la version "bijective" donnée en remarque.