# Annexe : chapitre 18 (exemples de fin de cours)

*Le 30/03/2024.*

## 1. Changement de variable

**Remarque.** Le mot "différentielle" fait référence au symbole du calcul infinitésimal "d$x$" de Leibniz (XVIIe siècle).

**Exemple 37**

($i$) Calculons $I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = \sqrt{x}$".

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc effectuer le changement de variable "$y = u(x)$" dans l'intégrale $I$ (ses bornes sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$).

Changement de bornes : Si $x = 1$, alors $y = u(1) = 1$ et si $x = 4$, alors $y = u(4) = 2$.

Changement de différentielle : Si $y = u(x)$, alors $\mathrm{d}y = u'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Donc $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$. *Attention à ne jamais terminer cette étape par un changement de différentielle "contenant du $x$ et du $y$" : s'arrêter à $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y$ ne permet pas de conclure. en principe, avec les changements de variable qui vont sont donnés, vous pouvez toujours conclure comme dans cet exemple.*

Changement d'intégrande : $\forall x \in [1,4], \frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}} = \frac{1}{y^2+y}$.

Conclusion : Par changement de variable, $I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{y^2+y}2y\mathrm{d}y$. Etc.

Donc $I = \int_1^2 \frac{2}{y+1}\mathrm{d}y = [2\ln(|1+y|)]_1^2 = 2\ln(3) - 2\ln(2) = 2\ln(\frac{3}{2})$.

($i$) **Variante importante :** *En pratique, les changement de variables donnés sont bijectifs, et on peut donc inverser la relation $y = u(x)$ en $x = u^{-1}(y)$ ce qui à l'avantage de faciliter le changement de différentielle et d'intégrande. Vous devriez préférer cette version, adoptée dans la suite, sauf pour les changements de variable affines qui sont vraiment plus simples.*

Calculons $I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = \sqrt{x}$".

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc effectuer le changement de variable "$y = u(x)$" dans l'intégrale $I$ (ses bornes sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$).

Changement de bornes : Si $x = 1$, alors $y = u(1) = 1$ et si $x = 4$, alors $y = u(4) = 2$.

Changement de différentielle : Si $y = \sqrt{x}$, alors $x = y^2$ donc $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$ (on dérive $y \mapsto y^2$, et le changement de différentielle est fait).

Changement d'intégrande : Si $y = \sqrt{x}$, alors $x = y^2$ donc $\frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{y^2+y}$.

Conclusion : Par changement de variable, $I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{y^2+y}2y\mathrm{d}y$. Etc.

($ii$) *Avec une rédaction plus légère.*

La fonction exponentielle étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer le changement de variable "$y = e^x$" dans l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x.$$

- Bornes : Si $x = 0$, alors $y = e^0 = 1$ et si $x = 1$, alors $y = e^1 = e$.

- Différentielle : Si $y = e^x$, alors $x = \ln(y)$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\mathrm{d}y$.
- Intégrande : Posant $y = e^x$, $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+y}$.

Conclusion : par changement de variable,

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\frac{1}{y}\mathrm{d}y.$$

Fin du calcul : $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, $\frac{1}{(y+1)y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$ donc par linéarité :

$$J = \int_1^e \frac{1}{y}\mathrm{d}y - \int_1^e \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = [\ln(|y|)]_1^e - [\ln(|1+y|)]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln(2).$$

**Remarque :** On peut calculer cette intégrale sans changement de variable en remarquant que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout réel $x$, et l'intégrande est alors de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

**Exemple 38**

C'est un changement de variable affine, sur lequel vous devez être autonome.

*Comment le détecter ? A composition par une fonction affine près (ici, $x \mapsto 3x+1$), l'intégrande est de la forme $\frac{\ln(t)}{t}$ que l'on sait intégrer à vue (de la forme $u(t)u'(t)$ ici). On effectue donc le changement de variable donné par cette fonction affine. C'est assez "visuel", il suffit de s'entrainer quelque fois. Les fonctions affines sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc il suffit de dire qu'on effectue un changement de variable affine comme seule justification.*

Effectuons le changement de variable affine "$t = 3x+1$" dans l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\mathrm{d}x$.

Bornes : Si $x = 1$, alors $t = 3x+1 = 4$ et si $x = 2$, alors $t = 7$.

Différentielle : Si $t = 3x+1$, alors $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$ (on dérive $x \mapsto 3x+1$) donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$. *Les changements de différentielle du cas affine sont toujours aussi simple : on doit juste diviser par le coefficient directeur.*

Intégrande : Si $t = 3x+1$, alors $\frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = \frac{\ln(t)}{t}$.

Conclusion : par changement de variable,

$$I = \int_4^7 \frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{3}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}\ln(t)^2]_4^7 = \frac{1}{6}(\ln(7)^2 - \ln(4)^2).$$

**Exemple 39**

*En fait, on peut calculer cette intégrale sans changement de variable (exercice moyen pour vous). Mais ici, on peut aussi vouloir poser $t = 3x+1$ pour se retrouver avec une exponentielle "simple".*

Effectuons le changement de variable affine "$y = 3x+1$" dans l'intégrale $\int_1^2 xe^{3x+1}\mathrm{d}x$.

Bornes : si $x = 1$, alors $y = 3x+1 = 4$ et si $x = 2$, alors $y = 7$.

Différentielle : Si $y = 3x+1$ alors $\mathrm{d}y = 3\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}y$.

Intégrande : Si $y = 3x+1$, alors $x = \frac{y-1}{3}$ donc $xe^{3x+1} = \frac{y-1}{3}e^y$. *Ici, on doit inverse la relation pour le changement d'intégrande.*

Par changement de variable :

$$\int_1^2 xe^{3x+1}\mathrm{d}x = \int_4^7 \frac{y-1}{3}e^y\frac{1}{3}\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\int_4^7 (y-1)e^y\mathrm{d}y.$$

Exercice : finir le calcul par linéarité, et à partir du calcul de $\int_4^7 e^y \mathrm{d}y$ (facile) et de $\int_4^7 ye^y \mathrm{d}y$ (IPP en dérivant $y$).

## Intégrales fonctions de leur borne(s)

*Prenons la fonction $\phi : t \mapsto \int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$. Si on savait calculer une primitive de l'intégrande $x \mapsto \frac{e^x}{x}$, alors il suffirait de l'utiliser pour avoir une formule sans intégrale de $\phi$. Mais ici, c'est impossible. Tout comme il n'y a pas d'expression dite "algébrique" (utilisant seulement sommes, quotients, produits) de la fonction exponentielle à l'aide des autres fonctions usuelles (la plus proche étant la somme infinie $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$), il n'y a pas d'expression "sympathique" des primitives de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$.*

*En revanche, pour travailler avec une fonction comme $\phi : t \mapsto \int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$, on peut :*

- *Considérer de manière abstraite une primitive $F$ de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur un domaine convenable, à savoir un segment contenant les bornes de l'intégrale, puis*
- *Utiliser $F$ et la définition de l'intégrale dans nos calculs.*

*Regardons comment cela se passe sur l'exemple 40.*

**Exemple 40**

$(i)$ Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc sur chaque intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et est non définie en 0. Donc pour que $\phi(t) = \int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ soit bien défini comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, il faut et il suffit que $t \in \mathbb{R}_+^*$ (car $1 \in \mathbb{R}_+^*$).

$\boxed{\text{Ainsi, } \phi \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

$(ii)$ **Faute d'énoncé** : calculer $\phi'$.

Par continuité, la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admet une primitive $F$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \phi(t) = \int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1).$$

Mais $F$ et $t \mapsto F(1)$ sont dérivables sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$ donc $\phi$ est dérivable sur cet intervalle ouvert, et :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \phi'(t) = F'(t) - 0 = \frac{e^t}{t}}$$

car $F$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(iii)$ Indication : Il faut minorer l'intégrande par $\frac{1}{x}$ (beaucoup d'autres minorations sont possibles et concluent) et utiliser la croissance de l'intégrale (valable pour $t \geq 1$). On obtient :

$$\forall t \geq 1, \phi(t) \geq \int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^t = \ln(t).$$

et on conclut, par passage à la limite des inégalités, que $\phi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

(*iv*) *C'est un peu comme la précédente, mais en plus difficile. Il faut être prudent pour la limite en* $0$*, car lorsqu'on veut faire tendre* $t$ *vers* $0$*,* $t$ *va se retrouver inférieur à* $1$ *donc les bornes de l'intégrale ne seront pas dans l'ordre croissant. On procède ainsi.*

Soit $t \in ]0,1]$.

Alors, $\phi(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x = -\int_t^1 \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x = \int_t^1 -\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$.

Or, par croissance de l'exponentielle :

$$\forall x \in [t,1], \frac{e^t}{x} \leq \frac{e^x}{x} \text{ ( car} x > 0)$$

donc :

$$\forall x \in [t,1], -\frac{e^t}{x} \geq -\frac{e^x}{x}.$$

Par intégration des inégalités ($t \leq 1$):

$$\int_t^1 -\frac{e^t}{x}\mathrm{d}x \geq \phi(t).$$

Enfin *($e^t$ "est une constante pour l'intégrale par rapport à $x$")*,

$$\int_t^1 -\frac{e^t}{x}\mathrm{d}x = -e^t\int_t^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -e^t(0-\ln(t)) = e^t\ln(t).$$

On a donc démontré :

$$\forall t \in ]0,1[, e^t\ln(t) \geq \phi(t).$$

Mais $e^t\ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty$ et $]0,1[$ est un voisinage à droite de $0$ donc par comparaison :

$\boxed{\phi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty.}$

**Exemple 41**

*Même morale. Ces exercices peuvent faire peur au début, mais sont en fait assez simple (pour les premières questions) lorsqu'on a compris qu'il suffit de considérer de manière abstraite une primitive de l'intégrande.*

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (pour vous) donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Notons $F$ une telle primitive.

Soit $\phi$ la fonction donnée par $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$. Par continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$, $\phi(x)$ est bien défini comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment pour tout réel $x$ *(le segment d'extrémités $x$ et $x^2$)*.

Donc $\phi$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = [F(t)]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x).$$

Or, la fonction $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme primitive de $f$), et $x \mapsto F(x^2)$ également (comme composée de fonctions dérivables), donc $\phi$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x\frac{\ln(1+x^4)}{1+x^8} - \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}.$$