TD de mathématiques n°18 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Pour commencer

Primitives et intégrales

Exercice 1 Pour chacune des formules suivantes, déterminer une primitive en précisant le domaine de validité :

(a) $f(x) = (x-1)^2$
(b) $f(x) = 2x\left(x^2-1\right)^2$
(c) $f(x) = x\left(1-x^2\right)$
(d) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
(e) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$
(f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
(g) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
(h) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$
(i) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$
(j) $f(x) = x\sqrt{x}$
(k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
(l) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
(m) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$
(n) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
(o) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$
(p) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$
(q) $f(x) = \frac{|x|}{x}$
(r) $f(x) = e^{-x}$
(s) $f(x) = e^{-3x}$
(t) $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^*$
(u) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$
(v) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
(w) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
(x) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
(y) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$
(z) $f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2}, \lambda \in \mathbb{R}^*$

Exercice 2

(a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$.
Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x$.
Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de primitives :

(a) $I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x - 1dx$
(b) $I_2 = \int_{-3}^{-1} \frac{\left(\ln\left(x^2\right)\right)^3}{x}dx$
(c) $I_3 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
(d) $I_4 = \int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$
(e) $I_5 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
(f) $I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$
(g) $I_7 = \int_0^{\ln 3} e^{-x}dx$
(h) $I_8 = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$
(i) $I_9 = \int_2^e \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$
(j) $I_{10} = \int_1^2 5^x dx$
(k) $I_{11} = \int_{-3}^5 x + \sqrt{x^2}dx$
(l) $I_{12} = \int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$
(m) $I_{13} = \int_1^3 \frac{(\ln x)^3}{x}dx$
(n) $I_{14} = \int_{-2}^2 \left|x^2-1\right| dx$
(o) $I_{15} = \int_0^1 \frac{x}{2-x^2}dx$

Exercice 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^x$ et $g(x) = x^2e^x$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$, puis en déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$, puis en déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

Intégration par parties

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes par intégrations par parties :

(a) $I_1 = \int_{-1}^1 xe^{-x}dx$
(b) $I_2 = \int_{-1}^1 x^3e^{-x^2}dx$
(c) $I_3 = \int_1^e (\ln x)^3dx$
(d) $I_4 = \int_1^e x^2\ln x dx$
(e) $I_5 = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$
(f) $I_6 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$
(g) $I_7 = \int_1^e x^2(\ln x)^3dx$
(h) $I_8 = \int_1^e \ln x dx$
(i) $I_9 = \int_0^1 x^2e^x dx$
(j) $I_{10} = \int_0^3 \left(x^2+x+1\right)e^{-2x}dx$
(k) $I_{11} = \int_1^e (\ln x)^2dx$
(l) $I_{12} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx$

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$.

(a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} dx$.

(c) En déduire explicitement I_n en fonction de n.

Exercice 7 Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

Indication : on pourra s'intéresser à la division euclidienne de X^2 par $X+1$.

Changement de variable

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

(a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1} dx, y = 2x+1$

(b) $I_2 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, y = \sqrt{x}$

(c) $I_3 = \int_1^2 \frac{2x}{3x^2+1} dx, y = x^2$

(d) $I_4 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx, y = \ln x$

(e) $I_5 = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx, y = 1+2x$

(f) $I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx, y = \sqrt{x}$

(g) $I_7 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx, y = \frac{x}{x+1}$

(h) $I_8 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}} dx, y = 1+e^x$

(i) $I_9 = \int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)} dx, y = x^3$

(j) $I_{10} = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx, y = e^{\sqrt{x}}$

(k) $I_{11} = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx, y = x^2$

(l) $I_{12} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx, y = \sqrt{1+e^x}$

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ en posant le changement de variable $s = \frac{1}{t}$.

Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 10

(a) Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto 1 + \ln x$ qui s'annule en 1.

(b) Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0 .

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto xe^x$.

Intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 12 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (préciser le domaine) :

(a) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

(b) $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$

(c) $J(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln(t+2)} dt$

(d) $G(x) = \int_{-x}^x \sqrt{1+t^2} dt$

(e) $I(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2} dt$

(f) $K(x) = \int_0^{e^x} \frac{t}{\ln(t+2)} dt$

Exercice 13 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

(a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

(b) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.

(c) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (On pourra introduire une primitive G de $g : t \longmapsto e^{-t^2}$ et exprimer F en fonction de G).

(d) Dresser le tableau de variations de F en précisant la valeur de $F(0)$.

(e) Montrer que pour tout $x > 0, xe^{-4x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

(f) Étudier la convexité de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

Intégration des inégalités

Exercice 14

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, 1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + t^2$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Exercice 15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2n+2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_{n-1} + I_n$.

(c) En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2} dx$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En déduire I_0.

(b) Calculer I_1 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

(d) En minorant $1 - x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 17 Pour tout $t \geq 2$, on pose $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^2}$.

(a) Dresser le tableau de variations de f sur $[2, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $k \geq 3, \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_{k-1}^{k} f(t) dt$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 3, \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n f(t) dt$.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Pour continuer

Primitives et intégrales

Exercice 18 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}, \frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2} dx$.

Exercice 19 Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R} (c \neq 0)$. Montrer que $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c}\left(a - \frac{ad-bc}{cx+d}\right)$ pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$.

En déduire une primitive de $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Intégration par parties

Exercice 20 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{X(1+X^2)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{1+X^2}$. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Changement de variable

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est paire. Montrer que pour tout $x > 0, \int_{-x}^{x} f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$.

(b) On suppose que f est impaire. Montrer que pour tout $x > 0, \int_{-x}^{x} f(t) dt = 0$.

Exercice 22 Montrer que pour tout $x > 0$, pour tout $y > 0, \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ et le changement de variable $s = \frac{t}{x}$.

Théorème fondamental de l'intégration

Exercice 23 Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_1^x |\ln t| dt$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 24 Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ et $G(x) = F(x) - \ln x$.

(a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations

(b) Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.

(c) Déterminer les limites de F en 0^+et en $+\infty$.

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 .

Intégration des inégalités

Exercice 26 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ et $K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4} dx$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n$.

Exercice 27 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

(a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 28 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n puis calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\ln 2$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\ln 2 - I_n$ sous forme d'une intégrale et en déduire que $\ln 2 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.