

Programme de colle n° 24 : Probabilités.

Semaine du lundi 29 Avril.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Opérations ensemblistes et dénombrabilité

24.1 Notion d'ensemble dénombrable ou au plus dénombrable. Exemples classiques d'ensembles dénombrables et non dénombrables. Famille (au plus) dénombrable de partie d'un ensemble, réunion et intersection dénombrable. Exemples en probabilités.

Aucune technicité n'est attendue sur la dénombrabilité. On commencera par travailler avec des familles indexées par des entiers.

24.2 Rappel des lois de De Morgan et des distributivités entre réunion et intersection.

Espaces probabilisés

24.3 Notion ("HP") de tribu. Proposition : l'ensemble vide appartient à toute tribu, une tribu est stable par intersection dénombrable, une tribu est stable par réunion et intersection finie.

Le terme de "tribu" n'est pas au programme, mais les propriétés associées à la définition le sont...

24.4 Notion d'espace probabilisable. Famille d'événements deux à deux incompatibles (rappel) dans un espace probabilisable. Probabilité sur un espace probabilisable, espace probabilisé. Propriétés (l'ensemble vide est un événement, la σ -additivité "est aussi vraie pour les réunions finies", et les propriétés vues dans le chapitre de probabilités finies sont toujours vraies). Majoration de $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$ l'aide de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ lorsque la série concernée converge.

24.5 Événements presque sûrs, négligeables. Indépendance mutuelle.

24.6 Exemple central. Expérience aléatoire : succession de lancers d'une pièce équilibrée à pile ou face. Questions : modéliser le problème, probabilité d'avoir pile pour la première fois au n -ième lancer (n fixé), probabilité d'avoir pile pour la première fois lors d'un lancer de numéro pair, probabilité de n'avoir que de piles lors des n premiers lancers, probabilité de ne faire que des piles.
"Limite monotone" et probabilité conditionnelle

24.7 Méthodes classiques pour démontrer qu'une réunion est quasi-certaine, qu'une intersection est quasi-impossible.

24.8 Propriété de la limite monotone (démonstrations non exigibles) : aperçu des résultats.

24.9 Probabilités conditionnelles : à finir à la rentrée. Les élèves doivent lire le cours pour constater les théorèmes communs au chapitre de probabilités finies.

Python

24.10 Début des statistiques.

Quelques questions de cours

- Énoncer les lois de De Morgan et de distributivité pour des réunions et intersections dénombrables. Démontrer deux égalités, au choix du colleur.
- définir la notion de tribu, et énoncer les propriétés des tribus (proposition 13). Montrer que l'ensemble vide est élément de toute tribu, et qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.
- Définir la notion d'espace probabilisable et d'espace probabilisé. Expliquer comment on modélise, en pratique, une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée à Pile ou Face.
- Énoncer les propriétés générales (prop 19) des espaces probabilisés. En démontrer deux, au choix du colleur.
- Définir la notion de ; famille d'événements deux à deux incompatibles, mutuellement indépendants, puis d'événement négligeable, presque sûr. Démontrer la formule des probabilités composées au rang 2 (sur un univers fini).
- Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales (avec et sans conditionnement), pour un univers fini.
- On lance indéfiniment une pièce équilibrée à pile ou face, les lancers étant mutuellement indépendants. Déterminer la probabilité de faire son premier pile au n -ième lancer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- On lance indéfiniment une pièce équilibrée à pile ou face, les lancers étant mutuellement indépendants. Montrer que l'événement "ne jamais obtenir pile" est négligeable.
- On lance indéfiniment un dé équilibré à 6 faces. Montrer que l'événement "obtenir au moins une face 1" est presque-sûr.