Concours blanc 1

*Devoir du **22 avril 2024**.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1

Dans cet exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - 2I_3)^3 = 0_3$.
2. On pose $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = 2X\}$.
   (*a*) Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (*b*) Donner une base et la dimension de E_2.
3. On pose $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (*a*) Montrer que $AV \in \mathrm{Vect}(U, V)$.
   (*b*) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$ d'inconnue matricielle $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (*c*) On pose $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. On pose maintenant $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (*a*) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (*b*) Déterminer une matrice T vérifiant $A = PTP^{-1}$. Vérifier ensuite que $T = 2I_3 + N$ où
   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. On considère l'ensemble $C = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | AM = MA\}$.
   (*a*) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in C \iff NQ = QN.$$
   (*b*) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $NQ = QN$ si et seulement si Q est combinaison linéaire de I_3, N et N^2.
   On aura donc montré, dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *:*
   $$\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | NQ = QN\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2).$$

(c) En déduire deux éléments S et T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$C = \text{Vect}(I_3, S, T).$$

Autrement dit, vous devez donner S et T tel que : C est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I_3, S et T.

6. On pose $R = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | M^2 + I_3 = A\}$.

   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

   $$M \in R \iff Q^2 = I_3 + N.$$

   (b) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors Q et N commutent.

   (c) En déduire, à l'aide de la question 5(b), l'ensemble des matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

   (d) Conclure en déterminant l'ensemble R.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction réelle :

$$h_n : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + 1 + \dfrac{1}{x^n} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. (*a*) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$

   (*b*) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$.

   (*c*) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. (*a*) Montrer que (v_n) converge vers un réel, noté l, et que $l \geq 1$.

   (*b*) Montrer que si $l > 1$, alors $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   (*c*) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $l \leq 1$. Que conclure sur la limite de (v_n) ?

5. (*a*) Montrer que : $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$.

   (*b*) Écrire une fonction `Python` d'entête `def h(n,x):` prenant en entrée un entier naturel `n` non nul et un réel `x` strictement positif, et renvoyant en sortie la valeur de $h_{\mathtt{n}}(\mathtt{x})$.

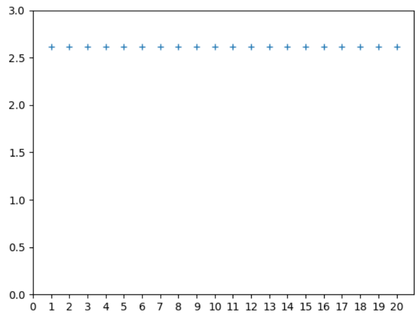
   (*c*) Recopier et compléter le code `Python` suivant pour qu'il définisse une fonction `v` prenant en entrée un entier naturel `n` non nul et renvoyant en sortie une valeur approchée à 10^{-5} près de $v_{\mathtt{n}}$ par la méthode de dichotomie appliquée à la fonction $h_{\mathtt{n}}$.

```
def v(n):
        a=1
        b=3
        while (b-a)>10**(-5):
                c=(a+b)/2
                if h(n,c) <4:
                        ...
                else:
                        ...
        ...
```

   (*d*) À la suite de la fonction `v`, on écrit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.arange(1,21,1)
Y=[]
for k in range(1,21):
        Y.append(v(k)**k)
plt.plot(X,Y,"+")
plt.show()
```

   À l'exécution, on obtient le graphique suivant.



Expliquer cet affichage. Que peut-on conjecturer?

6. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
7. Retrouver ainsi le résultat de la question 4c).

Exercice 3

On effectue une suite de lancers d'une pièce (pas forcément équilibrée). On suppose que les résultats des lancers sont indépendants, et que la pièce tombe sur "Pile" avec probabilité $p \in]0,1[$, et sur "Face" avec probabilité $q = 1-p$.

On s'intéresse au moment où apparaissent pour la première fois deux piles consécutifs.

On admet l'existence d'un espace probabilisé modélisant cette suite de lancers, dont on note Ω l'univers et $\mathbb{P}$ la probabilité.

On note, pour tout entier naturel k non nul:

- P_k l'événement : "on obtient Pile au k-ième lancer".
- A_k l'événement : "deux Piles consécutifs apparaissent pour la première fois aux lancers numéros k et $k+1$".

Enfin, on pose $a_k = \mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier $k \geq 1$, et on pose $a_0 = 0$.

Partie I : Étude d'une équation

On considère la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - qx - qp$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes, notées r_1 et r_2 dans la suite de sorte que $r_1 < r_2$.
2. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de p et q.
3. Calculer $f(1), f(0)$ et $f(-1)$. Déterminer le signe de ces réels.
4. Montrer que $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$.
5. Montrer que $|r_1| < |r_2| < 1$.

Partie II : Étude asymptotique de $(a_n)_n$

6. (a) Exprimer A_1 en fonction de P_1 et P_2. En déduire que $a_1 = p^2$.

   (b) Déterminer a_2 en fonction de p et q, à l'aide d'un raisonnement similaire.

   (c) Déterminer a_3 en fonction de p et q, à l'aide d'un raisonnement similaire.
7. Soit n un entier naturel, fixé dans ces sous questions. On veut démontrer deux égalités : $\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = qa_n$ et $\mathbb{P}_{\bar{P}_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}$.

   (a) Montrer que $P_1 \cap A_{n+2} = P_1 \cap \bar{P}_2 \cap A_{n+2}$. En déduire que :

   $$\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = \mathbb{P}_{P_1}(\bar{P}_2 \cap A_{n+2}).$$

   (b) Justifier que $\mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2}) = a_n$.

   (c) En déduire que $\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = qa_n$.

   (d) De même, expliquer pourquoi $\mathbb{P}_{\bar{P}_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}$. *Des calculs ne sont pas attendus pour cette question.*
8. Démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n.$$
9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$.
10. (a) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_n$.

    (b) Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{r_2^n}$.

Partie III : Une méthode matricielle

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose aussi, pour tout entier naturel n :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note I la matrice identité de taille 2.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et A.
12. (*a*) Les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ sont-elles inversibles?

    (*b*) Qu'en déduire sur les équations matricielles $AX = r_1 X$ et $AX = r_2 X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?
13. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
14. (*a*) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

    (*b*) Montrer que pour tout entier naturel n : $D^n = P^{-1}A^n P$.
15. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = PD^n P^{-1} X_0.$$
16. Retrouver ainsi une expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

Partie IV : Temps d'attente du premier double pile

17. Exprimer $(1 - r_1)(1 - r_2)$ en fonction de p.
18. Exprimer $\dfrac{r_2(1 - r_1)^2 - r_1(1 - r_2)^2}{r_2 - r_1}$ en fonction de p et q.
19. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$.

    (*a*) Calculer S_N en fonction de p, r_1 et r_2.

    (*b*) Donner, en justifiant, un événement dont S_N est la probabilité.
20. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
21. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n+1)a_n$ converge et que sa somme vaut $T = \dfrac{1+p}{p^2}$.

    T est le nombre moyen de lancers nécessaires pour la réussite du premier double pile. On dira que c'est "l'espérance" de la "variable aléatoire" donnant le rang d'apparition du premier double pile.

— Fin de l'énoncé —