Correction : CB 1

Devoir du 22/04/2024.

Exercice 1

1. On pose le calcul : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis on trouve :

   $\boxed{(A-2I_3)^3 = (A-2I_3)^2(A-2I_3) = 0_3.}$

2. (a) On utilise la caractérisation en 3 points des sous-espaces vectoriels pour montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - Tout d'abord, par définition de E_2, on a bien $E_2 \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - On a bien $0_{3,1} \in E_2$ car $A0_{3,1} = 0_{3,1}$ et $2 \cdot 0_{3,1} = 0_{3,1}$, ce qui montre bien :

   $$A0_{3,1} = 2 \cdot 0_{3,1}.$$

   - Enfin, montrons que pour tous réels λ et μ, pour tous éléments X et Y de E_2, on a :

   $$\lambda X + \mu Y \in E_2.$$

   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(X, Y) \in (E_2)^2$.

   Tout d'abord, $\lambda X + \mu Y \in \mathcal{M}_{3,1}$ ($\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ étant stable par combinaisons linéaires).

   Alors, vu les propriétés du calcul matriciel :

   $$A(\lambda x + \mu Y) = A(\lambda X) + B(\mu Y) = \lambda AX + \mu BY.$$

   Or, X et Y sont éléments de E_2 donc il vient :

   $$A(\lambda X + \mu Y) = \lambda \cdot (2X) + \mu \cdot (2Y) = 2\lambda X + 2\mu Y = 2(\lambda X + \mu Y).$$

   Ceci démontre bien que $\lambda X + \mu Y \in E_2$, d'où le résultat.

   Finalement, d'après la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels:

   $\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

   (b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   On a la chaîne d'équivalence suivante :

$$X \in E_2 \iff AX = 2X \iff \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_1 \\ 2x_2 + x_3 = 2x_2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} .$$

Finalement, ceci montre:

$$E_2 = \{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x_2 \in \mathbb{R} \} = \{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Donc :

$$E_2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Ainsi, $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est une famille génératrice de E_2. En tant que famille constituée d'un unique vecteur non nul, cette famille est libre. Ainsi :

$$\boxed{(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ est une base de } E_2, \text{ et } E_2 \text{ est de dimension 1.}}$$

3. (a) Le calcul du produit matriciel AV donne :

$$AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

On voit alors (les 2 et 3e coordonnées de U et V facilitent la recherche de cette égalité):

$$AV = U + 2V.$$

Donc on a bien : $\boxed{AV \in \mathrm{Vect}(U, V).}$

(b) *Il y a une solution un peu plus maline (sans calculs) que celle donnée ici (tout à fait pédestre). Elle utilise la question précédente. Exercice difficile : la trouver. Ingrédients : la combinaison linéaire de 3a) et la base de E_2 trouvée en 2b).*

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$.

Soient x, y et z réels tels que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Alors, $AX = \begin{pmatrix} x - y \\ 2y + z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix}$ et $2X + V = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ 2y \\ 2z + 1 \end{pmatrix}$.

Donc par chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned}
AX = 2X + V &\iff \begin{pmatrix} x-y \\ 2y+z \\ -x-y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y \\ 2z+1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x-y = 2x+1 \\ 2y+z = 2y \\ -x-y+3z = 2z+1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x-y = 1 \\ z = 0 \\ -x-y+z = 1 \end{cases} \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x-y = 1 \\ z = 0 \\ -x-y = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -1-y \\ z = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = 2X + V$ est :

$$\boxed{S = \{\begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R}\}.}$$

(c) Tout d'abord, montrons que (U, V, W) est une famille libre.

On effectue un test de liberté. Soient λ, μ, γ des réels. Alors :

$$\lambda U + \mu V + \gamma W = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -\lambda + \mu - \gamma = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \gamma = 0.$$

Ceci démontre bien que (U, V, W) est libre.

Ainsi, (U, V, W) forme une famille libre de 3 vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension 3.

Par théorème, $\boxed{(U, V, W) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

4. (a) On pose le produit matriciel : $P \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inverse à droite de la matrice carrée P. Par théorème,

$$\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) On pose $T = P^{-1}AP$. Alors, $PTP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = (PP^{-1}A(P^{-1}P) = I_3AI_3 = A$.

Enfin, par calcul du produit $P^{-1}AP$, on trouve :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + N}$$

d'où le résultat.

5. (a) On remarque que $M = PQP^{-1}$ (raisonnement similaire à celui de 4b).

Par chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C &\iff AM = MA \\ &\iff (PQP^{-1})A = A(PQP^{-1} \\ &\iff PQP^{-1}A = APQP^{-1}. \end{aligned}$$

Or, P et P^{-1} sont inversibles, donc pour toutes matrices X et Y :

$$X = YY \iff P^{-1}X = P^{-1}Y \iff P^{-1}XP = P^{-1}YP.$$

Reprenant la chaîne d'équivalence ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} M \in C &\iff PQP^{-1}A = APQP^{-1} \\ &\iff P^{-1}PQP^{-1}AP = P^{-1}APQP^{-1}P \\ &\iff QT = TQ(car\ P^{-1}AP = T). \end{aligned}$$

Enfin, $T = 2I_3 + N$. Donc $QT = 2Q + QN$ et $TQ = 2Q + NQ$. Donc : $TQ = QT \iff 2Q + QN = 2Q + NQ \iff QN = NQ$.

Finalement, on a bien l'équivalence :

$$\boxed{M \in C \iff QT = TQ \iff QN = NQ.}$$

(b) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons, pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $q_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de Q.

Alors :

$$\begin{aligned} NQ = QN &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_{1,1} & q_{1,2} \\ 0 & q_{2,1} & q_{2,2} \\ 0 & q_{3,1} & q_{3,2} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} q_{2,1} = 0 \\ q_{2,2} = q_{1,1} \\ \vdots \\ 0 = q_{3,2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} q_{1,1} = q_{3,3} \\ q_{2,2} = q_{3,3} \\ q_{1,2} = q_{2,3} \\ q_{2,1} = 0 \\ q_{3,1} = 0 \\ q_{3,2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{NQ = QN \text{ si et seulement s'il existe } x,\ y \text{ et } z \text{ réels tels que : } Q = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = xI_3 + yN + zN^2}$$

(car $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$), ce qui est bien le résultat voulu.

(c) On pose $S = PNP^{-1}$ et $T = PN^2P^{-1}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'après la question 5(a), $M \in C \iff (P^{-1}MP)N = N(P^{-1}MP)$.

D'après la question précédente, $(P^{-1}MP)N = N(P^{-1}MP) \iff \exists(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, P^{-1}MP = xI_3 + yN + zN^2$.

Mais, pour tous réels x, y et z, on a l'équivalence suivante, par inversibilité de P et P^{-1} (multiplier une égalité par P ou P^{-1} donne une égalité équivalente car ces matrices sont inversibles) :

$$P^{-1}MP = xI_3+yN+zN^2 \iff M = P\left(xI_3 + yN + zN^2\right)P^{-1} \iff M = xPP^{-1}+yPNP^{-1}+zPN^2P^{-1} \iff$$

Finalement, les deux équivalences précédentes donnent :

$$M \in C \iff \exists(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, M = xI_3 + yS + zT \iff M \in \mathrm{Vect}(I_3, S, T).$$

Cette équivalence étant vraie pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et C étant un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ceci démontre bien :

$\boxed{C = \mathrm{Vect}(I_3, S, T).}$

6. (a) Par inversibilité de P et P^{-1} :

$$M^2 + I_3 = A \iff P^{-1}\left(M^2 + I_3\right) = P^{-1}A \iff P^{-1}\left(M^2 + I_3\right)P = P^{-1}AP.$$

Or:

$$P^{-1}\left(M^2 + I_3\right)P = P^{-1}M^2P + P^{-1}P = (P^{-1}MP)^2 + I_3 = Q^2 + I_3$$

et

$$P^{-1}AP = T = 2I_3 + N.$$

L'équivalence précédente devient :

$\boxed{M^2 + I_3 = A \iff Q^2 + I_3 = 2I_3 + N \iff Q^2 = I_3 + N.}$

Ceci démontre le résultat voulu.

(b) Supposons que $Q = I_3 + N$. Alors $N = Q^2 - I_3$. Donc par produit à droite ou à gauche par Q:

$$NQ = Q^3 - Q \text{ et } QN = Q^3 - Q.$$

donc $\boxed{N \text{ et } Q \text{ commutent si } Q = I_3 + N, \text{ d'où le résultat}}$.

(c) Posons $E = \{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | Q^2 = I_3 + N\}$.

D'après la question 5(b), E est une partie de $\mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Soit $Q \in \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$. Soient x, y et z des réels tels que :

$$Q = xI_3 + yN + zN^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
Q \in E \iff Q^2 = I_3 + N &\iff (xI_3 + yN + zN^2)^2 = I_3 + N \\
&\iff x^2 I_3 + 2xyN + 2xzN^2 + y^2N^2 + yzN^3 + zyN^3 + z^2N^4 = I_3 + N \\
&\iff x^2 I_3 + (2xy)N + (2xz + y^2)N^2 = I_3 + N \text{ (car} N^3 = N^4 = 0_3) \\
&\iff \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & 2xz + y^2 \\ 0 & x^2 & 2xy \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ 2xz + y^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2x} \\ z = -\dfrac{y^2}{2x} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{8} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{E \text{ est constitué de 2 éléments}}$: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ On note S_1 et S_2 ces deux matrices.

(d) D'après la question 6(a) : $R = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | P^{-1}MP \in E\}$.

Or, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pour toute matrice X :

$$P^{-1}MP = X \iff M = PXP^{-1}$$

donc avec la question précédente :

$$R = \{PS_1P^{-1}, PS_2P^{-1}\}.$$

Calculant, il vient que

$$\boxed{\text{les deux éléments de } R \text{ sont } \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
   h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme des fonctions usuelles dérivables $x \mapsto x^n + 1$ (polynomiale) et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ (composée de $x \mapsto x^n$ dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$).
   Alors:
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = nx^{n-1}(1 - \frac{1}{x^{2n}}).$$
   Enfin, pour tout $x > 0$:
   $$h_n'(x) > 0 \overset{(1)}{\iff} 1 - \frac{1}{x^{2n}} > 0 \iff x^{-2n} < 1 \overset{(2)}{\iff} x > 1^{-2n} = 1$$
   ((1) : $nx^{n-1} > 0$ car $x > 0$, (2) : car $t \mapsto t^{-2n}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, vu que $2n > 0$).

La même chaîne d'équivalence avec des égalités étant vraie, on a donc que h_n' est strictement négative sur $]0,1[$, nulle en 0 et strictement positive sur $[1,+\infty[$.

$\boxed{\text{Par condition suffisante de monotonie stricte sur un intervalle, } h_n \text{ est bien strictement décroissante sur }]0,1[\text{ (et même sur }]0,1]) \text{ et strictement croissante sur } [1,+\infty[.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable, donc à fortiori sur chaque intervalle $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

   Elle est strictement monotone sur chacun de ces intervalles par la question précédente. D'après le théorème de la bijection monotone :

   - h_n réalise une bijection décroissante de $]0,1[$ vers $]h_n(1), \lim\limits_{x\to 0^+} h_n(x)[$,
   - h_n réalise une bijection croissante de $[1,+\infty[$ vers $[h_n(1), \lim\limits_{x\to +\infty} h_n(x)[$.

   Enfin, sans forme indéterminée, $h_n(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty\to+\infty]{} +\infty$. Et $h_n(1) = 3$.

   Ainsi :

   - h_n réalise une bijection décroissante de $]0,1[$ vers $]3,+\infty[$,
   - h_n réalise une bijection croissante de $[1,+\infty[$ vers $[3,+\infty[$.

   Ces bijections induites, et l'appartenance $4 \in [3,+\infty[$, montrent bien que l'équation $h_n(x) = 4$ admet :

   - Exactement une solution sur $]0,1[$, notée u_n dans la suite,
   - Exactement une solution sur $[1,+\infty[$, notée v_n dans la suite.

   Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } h_n(x) = 4 \text{ admet exactement deux solutions : } u_n \text{ et } v_n}$, et on a bien $0 \leq u_n < 1 \leq v_n$.
   Pour finir, $h_n(1) = 3 \neq 4$ donc $v_n \neq 1$ donc :

   $\boxed{0 < u_n < 1 < v_n.}$

   Ceci démontre le résultat voulu.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

   $$h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n + 1 + \frac{1}{x^n} = \frac{(x^{2n+2} + x^{n+1} + 1 - x^{2n+1} - x^{n+1} - x)}{x^{n+1}}.$$

   Or, en développant : $(x-1)(x^{2n+1}-1) = x^{2n+2} + x^{n+1} + 1 - x^{2n+1} - x^{n+1} - x$.

   On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$:

   $$\boxed{h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1}{x^{n+1}}.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a montré que $v_n > 1$, donc $v_n - 1 > 0$ et $v_n^{2n+1} > 1^{2n+1} = 1$, ce qui donne $v_n^{2n+1} - 1 > 0$. De plus, $v_n^{2n+1} > 0$.

   Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, $h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n)$ est positif comme produit et quotient de réels positifs.

   Or, $h_n(v_n) = 4$. On a donc $h_{n+1}(v_n) - 4 \geq 0$.

   $\boxed{\text{On a donc bien } h_{n+1}(v_n) \geq 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   h_{n+1} est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, et v_n et v_{n+1} sont éléments de $[1,+\infty[$. On a donc l'équivalence :

   $$v_{n+1} \leq v_n \iff h_{n+1}(v_{n+1}) \leq h_{n+1}(v_n).$$

   Or, l'inégalité du membre de droite est vraie d'après la question précédente.

Ceci montre que $v_{n+1} \leq v_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

Donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

4. (a) La suite v est décroissante d'après la question précédente, et minorée par 1 d'après la question 2, donc converge vers un réel, noté l, d'après le théorème de la limite monotone.

   On a de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 1$ donc par passage à la limite des inégalité, $l \geq 1$.

   (b) Supposons $l > 1$. v converge vers l en étant décroissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq l.$$

   Par croissance des fonctions $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n^n \geq l^n.$$

   Or, $l > 1$ donc $l^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Par comparaison :

   $\boxed{v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

   (c) Supposons par l'absurde $l > 1$.

   D'après la question précédente, on aurait $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Or, pour tout $n > 0$, $h_n(v_n) = 4$ donc :

$$v_n^n = 4 - 1 - \frac{1}{v_n^n}.$$

   Mais $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition, $\dfrac{1}{v_n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Par opérations :

$$v_n^n = 3 - \frac{1}{v_n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

   Ceci contredit $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par unicité de la limite d'une suite.

   $\boxed{\text{On a bien montre } l \leq 1 \text{ par l'absurde.}}$

   Enfin, $l \leq 1$ et $l \geq 1$ (par 4(a)) donc $l = 1$.

   $\boxed{\text{On a donc : } \lim_{n\to+\infty} v_n = 1.}$

5. (a) Soit $n \geq 1$. $h_n(3) = 3^n + 1 + \dfrac{1}{3^n} \geq 3^n + 1 \geq 4$ car $\begin{cases} n \geq 1 \implies 3^n \geq 3 \\ \dfrac{1}{3^n} \geq 0 \end{cases}$.

   Ainsi, $h_n(3) \geq h_n(v_n)$.

   Or, $v_n \geq 1$ et $3 \geq 1$ donc par croissance stricte de h_n sur $[1, +\infty[$:

$$v_n \leq 3.$$

   $\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq 3.}$

   (b)
```
def h(n,x):
        return(x**n+1+1/(x**n))
```

   (c)
```
def v(n):
        a=1
        b=3
        while (b-a)>10**(-5):
```

```
            c=(a+b)/2
            if h(n,c)<4:
                a=c
            else:
                b=c
        return((a+b)/2) #return(a) ou return(b) aussi OK
```

(*d*) Le code exécuté trace les 20 premiers termes de la suite $(v_n^n)_n$.

On peut conjecturer que cette suite est une suite constante.

6. Soit $n \geq 1$.

   On sait que $h_n(v_n) = 4$ donc $v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = 4$.

   Posons $t_n = v_n^n$. On a donc :
   $$t_n - 3 + \frac{1}{t_n} = 0$$
   d'où
   $$t_n^2 - 3t_n + 1 = 0.$$

   t_n est donc racine du polynôme $P = X^2 - 3X + 1$, de discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$. Ses racines sont ainsi :
   $$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

   Mais $\sqrt{5} \geq 1$ donc $3 - \sqrt{5} \leq 2$ donc $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leq 1$.

   Or, $t_n = v_n^n > 1$ car $v_n > 1$.

   Donc $t_n \neq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et t_n est racine de P : nécessairement :
   $$t_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

   $\boxed{\text{On a bien montré que pour tout } n \geq 1,\ v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.}$

7. D'après la question précédente :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

   Or, $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par composition :

   $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

Exercice 3

1. L'équation $f(x) = 0$ est une équation polynômiale de degré 2. Son discriminant est
   $$\Delta = (-q)^2 + 4pq = q(q + 4p).$$

   Or, $q > 0$ et $p > 0$ donc $\Delta = q(q + 4p)$ est strictement positif comme produit de réels strictement positifs.

   Ainsi,

   $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions, que l'on note } r_1 \text{ et } r_2 \text{ dans la suite de sorte que } r_1 < r_2}.$

   Ces solutions sont $r_1 = \dfrac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$.

2. D'après les relations coefficients-racines provenant de l'égalité de factorisation :

$$(X - r_1)(X - r_2) = X^2 - qX - qp,$$

on a que :

$$\boxed{\begin{cases} r_1 + r_2 = q \\ r_1 r_2 = -qp \end{cases}.}$$

3. En utilisant $p = 1 - q$, et comme p et q sont strictement positifs :

$$f(1) = 1 - q - qp = p - qp = p(1 - q) = p^2 > 0.$$

$$f(0) = -pq < 0.$$

$$f(-1) = 1 + q - qp = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2 \geq 1 > 0.$$

4. D'après la question précédente, f change de signe sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$.

   f étant continue comme polynôme, f s'annule sur chacun de ces intervalles, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

   $f(0) \neq 0$ donc f s'annule au moins une fois sur $[-1, 0[$ et au moins une fois sur $]0, 1]$.

   Mais f s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 1), en r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$.

   On a donc $r_1 \in [-1, 0[$ et $r_2 \in]0, 1]$. Enfin, $f(-1) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$ donc $r_1 \neq -1$ et $r_2 \neq 1$.

   On a donc bien montré : $\boxed{-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1.}$

5. On sait que $r_1 + r_2 = q > 0$, d'après la question 2.

   Donc $r_2 > -r_1$. Mais $r_1 < 0$ et $r_2 > 0$: ceci montre $|r_1| < |r_2|$.

   Enfin, $|r_2| = r_2 < 1$ d'après la question précédente.

   Finalement, $\boxed{|r_1| < |r_2| < 1.}$

6. (a) $\boxed{\text{On a } A_1 = P_1 \cap P_2}$ car A_1 est réalisé si et seulement si les deux premiers lancers tombent sur Pile.

   Par indépendance des lancers, P_1 et P_2 sont indépendants donc :

   $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = p^2.}$

   (b) A_2 est réalisé si et seulement si le premier lancer tombe sur Face, et les 2e et 3e lancers sur Pile (si l'on obtenait Pile au premier lancer, avoir Pile au second réaliserait A_1 et non A_2.)

   Ainsi, $A_2 = \bar{P}_1 \cap P_2 \cap P_3$.

   Par indépendance des lancers, $\bar{P}_1, P_2$ et P_3 sont mutuellement indépendants donc :

   $\boxed{\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\bar{P}_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3) = qp^2.}$

   (c) Les résultats réalisant A_3 sont exactement ceux dont les quatre premiers lancers sont de la forme "P,F,P,P" ou "F,F,P,P". Ainsi,

$$A_3 = \left(P_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3 \cap P_4\right) \cup \left(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3 \cap P_4\right).$$

   Or, cette réunion est disjointe car :

$$\left(P_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3 \cap P_4\right) \cap \left(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3 \cap P_4\right) = P_1 \cap \bar{P}_1 \cap ... = \emptyset \cap ... = \emptyset.$$

   On a donc, par incompatibilité puis indépendance :

$$\boxed{a_3 = \mathbb{P}\left(P_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3 \cap P_4\right) + \mathbb{P}\left(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3 \cap P_4\right) = pqpp + qqpp = p^2q(p + q) = p^2q.}$$

7. (a) *Beaucoup de variantes possibles pour la première partie de cette question.*

Montrons que l'événement $P_1 \cap P_2 \cap A_{n+2}$ est impossible.

On a que $A_1 = P_1 \cap P_2$, donc $P_1 \cap P_2 \cap A_{n+2} = A_1 \cap A_{n+2}$. Mais A_1 et A_{n+2} sont incompatibles car $n+2 \neq 1$, car $n \geq 0$ (et on ne peut donc pas avoir une première succession de deux Pile à la fois lors des lancers 1 et 2, et lors des lancer $n+2$ et $n+3$).

Ainsi, $A_1 \cap A_{n+2}$, donc $P_1 \cap P_2 \cap A_{n+2}$, est impossible.

Or, par théorème : $(P_1 \cap A_{n+2}) \cap P_2 = \emptyset \implies (P_1 \cap A_{n+2}) \subset \bar{P}_2$.

$P_1 \cap A_{n+2}$ étant une partie de $\bar{P}_2$, $\boxed{\text{on a bien montré } P_1 \cap A_{n+2} = P_1 \cap \bar{P}_2 \cap A_{n+2}}$.

Montrons maintenant $\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = \mathbb{P}_{P_1}(\bar{P}_2 \cap A_{n+2})$.

Tout d'abord, P_1 étant de probabilité p non nulle, ces probabilités conditionnelles sont bien définies. Alors par définition et d'après le résultat précédent :

$$\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \cap A_{n+2})}{\mathbb{P}(P_1)} = \frac{\mathbb{P}(P_1 \cap \bar{P}_2 \cap A_{n+2})}{\mathbb{P}(P_1)} = \frac{\mathbb{P}(P_1 \cap (\bar{P}_2 \cap A_{n+2}))}{\mathbb{P}(P_1)} = \mathbb{P}_{P_1}(\bar{P}_2 \cap A_{n+2}).$$

$\boxed{\text{On a bien montré } \mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = \mathbb{P}_{P_1}(\bar{P}_2 \cap A_{n+2}).}$

(b) Tout d'abord, $\mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2})$ est bien défini car par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(P_1 \cap \bar{P}_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(\bar{P}_2) = pq \neq 0.$$

$\mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2})$ est la probabilité de réaliser A_{n+2} sachant l'événement $P_1 \cap \bar{P}_2$ réalisé.

Supposons $P_1 \cap \bar{P}_2$ réalisé. Alors, notant $u_i \in P, F$ le résultat du i ième lancer pour tout entier $i \geq 1$, la succession des $n+3$ premiers résultats obtenus est de la forme :

$$P, F, u_3, \ldots, u_{n+3}.$$

On remarque que cette succession réalise A_{n+2} si et seulement si la succession de $n+1$ lancers $u_3, \ldots, u_{n+3}$ obtient sa première succession de deux Pile aux lancers n et $n+1$.

Ceci est impossible si $n = 0$, donc pour $n = 0$ on a bien $\mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2}) = 0 = a_0$.

Si $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2})$ est donc la probabilité d'obtenir, lors de lancers successifs de la pièce, une première succession de deux Pile aux lancers n et $n+1$, qui vaut a_n par définition.

$\boxed{\text{On a donc bien montré } \mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2}) = a_n.}$

(c) Calculons $\mathbb{P}(P_1 \cap A_{n+2}$ de deux manières différents.

D'après la formule des probabilités composées ($\mathbb{P}(P_1) = p \neq 0$):

$$\mathbb{P}(P_1 \cap A_{n+2}) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = p\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}).$$

Mais d'après la question 7 (a) et la formule des probabilités composées (on a déjà montré $\mathbb{P}(P_1 \cap \bar{P}_2) = pq \neq 0$):

$$\mathbb{P}(P_1 \cap A_{n+2}) = \mathbb{P}(P_1 \cap \bar{P}_2 \cap A_{n+2}) = \mathbb{P}(P_1 \cap \bar{P}_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap \bar{P}_2}(A_{n+2}).$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$\mathbb{P}(P_1 \cap A_{n+2}) = pqa_n.$$

Finalement, $\mathbb{P}(P_1 \cap A_{n+2}) = p\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = pqa_n$.

Or, $p \neq 0$, donc $\boxed{\text{la deuxième égalité entraine } \mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) = qa_n.}$

(d) Si $\bar{P}_1$ est réalisé, alors le premier lancer tombe sur Face, et on remarque que A_{n+2} est réalisé si et seulement si la suite de lancers obtenue en oubliant le premier lancer obtient une première succession de deux Pile aux lancers $n+1$ et $n+2$.

Ainsi, $\mathbb{P}_{barP_1}(A_{n+2})$ est la probabilité, dans une succession de lancers de la pièce, d'obtenir une première succession de deux piles lors des lancers $n+1$ et $n+2$, qui vaut a_{n+1} par définition.

$\boxed{\text{On a bien montré } \mathbb{P}_{barP_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(P_1, \bar{P}_1)$ est un système complet d'événement, et $\begin{cases} \mathbb{P}(P_1) = p \neq 0 \\ \mathbb{P}(\bar{P}_1) = q \neq 0 \end{cases}$.

D'après la formule des probabilités totales et les question précédentes:

$$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) + \mathbb{P}(\bar{P}_1)\mathbb{P}_{\bar{P}_1}(A_{n+2}) = pqa_n + qa_{n+1}.$$

$\boxed{\text{On a donc bien montré que : } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n.}$

9. D'après la question précédente, $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique
$$x^2 - qx - pq = 0.$$

D'après la partie 1, cette équation a deux solutions distinctes r_1 et r_2, donc par théorème, il existe deux réels λ et μ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Déterminons λ et μ. On a vu que $a_0 = 0$ et $a_1 = p^2$. λ et μ vérifient donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = p^2 \end{cases}$.

Or :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = p^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (r_2 - r_1)\mu = p^2 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1)$$
$$\iff \begin{cases} \lambda = -\mu = -\dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \\ \mu = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \quad (r_2 \neq r_1) \end{cases}.$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -\dfrac{p^2}{r_2 - r_1} r_1^n + \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} r_2^n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n).}$

10. (a) On sait que $|r_1| < 1$ et $r_2| < 1$ d'après la question 5. Donc $r_1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $r_2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par opérations et sans forme indéterminée:

$$\boxed{a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$\frac{a_n}{r_2^n} = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2^n}{r_2^n} - \frac{r_1^n}{r_2^n}\right) = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right).$$

Or, $|r_1| \leq |r_2|$ d'après la question 5, donc $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| < 1$. Par conséquent :
$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, par opération : $\left(1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par produit, on a donc :

$$\boxed{\frac{a_n}{r_2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{p^2}{r_2 - r_1}.}$$

11. D'après la question 2, $A = \begin{pmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question 8, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pqa_n + qa_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

On a donc montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.}$

12. (a) $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$ donc :

$$\det(A - r_1 I) = -2r_1 r_2 + r_1 r_2 = 0.$$

Par théorème, $A - r_1 I$ n'est pas inversible.

De même, on a $\det(A - r_2 I) = \det\left(\begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}\right) = 0.$

$\boxed{\text{Les matrice } A - r_1 I \text{ et } A - r_2 I \text{ ne sont donc pas inversibles.}}$

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$AX = r_1 X \iff AX - r_1 X = 0_{2,1} \iff (A - r_1 I)X = 0_{2,1}.$$

Or, le système linéaire associé à l'équation matricielle $(A - r_1 I)X = 0_{2,1}$:

- N'est pas de Cramer, car $A - r_1 I$ n'est pas inversible,
- est homogène, donc admet $(0, 0)$ comme solution.

Or, on sait qu'un système carré qui n'est pas de Cramer admet 0 ou une infinité de solutions.

Par équivalence, l'équation matricielle $(A - r_1 I)X = 0_{2,1}$, puis $AX = r_1 X$, admet une infinité de solutions.

Il en est de même de l'équation $AX = r_2 X$ pour les mêmes raisons, donc :

$\boxed{\text{Ces équations matricielles ont une infinité de solutions.}}$

13. Le déterminant de P est $\det(P) = r_1 - r_2 \neq 0$ (car$r_1 \neq r_2$ par la question 1).

Par théorème, $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

On peut vérifier, en posant le produit matriciel, que :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}.}$$

14. (a) On pose successivement les produits matriciels, on trouve :

$$AP = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$$

puis

$$P^{-1}A = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1(r_1 - r_2) & 0 \\ 0 & r_2(r_1 - r_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.}$

(b) Posons, pour tout entier naturel n, $H(n)$: "$D^n = P^{-1}A^n P$".

$\boxed{\text{Montrons par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, H(n).}$

Initialisation : $D^0 = I$ par définition, et $P^{-1}A^0 P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$. On a donc bien $D^0 = P^{-1}A^0 P$ d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$.

On a :

$$D^{n+1} = D^n D \overset{H(n)}{=} (P^{-1}A^nP)D \overset{14(a)}{=} (P^{-1}A^nP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^n(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Ceci démontre $H(n+1)$, d'où l'hérédité.

15. Par la question précédente, $D^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc en multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n.$$

Donc pour tout entier n, $PD^nP^{-1}X_0 = A^nX_0$.

Or, d'après la question 11, $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier n.

Une récurrence classique montre alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0.$$

$\boxed{\text{Finalement, pour tout entier } n,\ X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0.}$

16. soit $n \in \mathbb{N}$.

D étant diagonale, le calcul de D^n est immédiat :

$$D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ -p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 r_1^n \\ -p^2 r_2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} p^2(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) \\ p^2(r_1^n - r_2^n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'égalité obtenue sur les coefficients en 2e ligne redonne alors, pour tout entier n :

$$\boxed{a_n = \frac{p^2}{r_1 - r_2}(r_1^n - r_2^n).}$$

(ce qui redonne l'expression précédemment obtenue, car : $p^2 \dfrac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = p^2 \dfrac{-(r_1^n - r_2^n)}{-(r_1 - r_2)} = p^2 \dfrac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}$).

17. Avec le résultat de la question 2 et l'égalité $p = 1 - q$:

$$\boxed{(1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - (r_1 + r_2) + r_1r_2 = 1 - q - qp = p - qp = p(1 - q) = p^2.}$$

18. On a :

$$\frac{r_2(1 - r_1)^2 - r_1(1 - r_2)^2}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - 2r_1r_2 + r_2r_1^2 - r_1 + 2r_1r_2 - r_1r_2^2}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - r_1 - r_1r_2(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} = 1 - r_1r_2.$$

Enfin, $r_1r_2 = -pq$ donc :

$$\boxed{\frac{r_2(1 - r_1)^2 - r_1(1 - r_2)^2}{r_2 - r_1} = 1 + pq.}$$

19. (a) $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^k - r_1^k)$. donc par linéarité de la somme :

$$S_N = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left(\sum_{k=1}^{n} r_2^k - \sum_{k=1}^{n} r_1^k\right).$$

On reconnait deux sommes géométriques, et $r_1$et r_2 ne sont pas égaux à 1 par la question 4, donc :

$$S_N = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left(r_2\frac{1-r_2^N}{1-r_2} - r_1\frac{1-r_1^N}{1-r_1}\right) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \times \frac{r_2(1-r_2^N)(1-r_1) - r_1(1-r_1^N)(1-r_2)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Finalement, à l'aide du résultat de la question 17 :

$$\boxed{S_N = \frac{r_2(1-r_2^N)(1-r_1) - r_1(1-r_1^N)(1-r_2)}{r_2 - r_1}.}$$

(b) Les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont deux à deux incompatibles, car la première succession de deux Pile ne peut à la fois arriver aux lancers "i et $i+1$" et aux lancers "j et $j+1$" si $i \neq j$ (pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$).

Par conséquent :

$$\boxed{\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{N} A_k) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{N} a_k = S_N.}$$

Enfin, $\bigcup_{k=1}^{N} A_k$ est l'événement : "la première succession de deux Pile arrive lors des $N+1$ premiers lancers".

Ainsi,

$\boxed{S_N \text{ est la probabilité d'avoir eu une succession de deux Pile lors des } N+1 \text{ premiers lancers.}}$

20. Pour tout entier $N \geq 1$, S_N est la somme partielle d'indice N de $\sum_{n\geq 1} a_n$.

D'après la question 19(a) :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \frac{r_2(1-r_2^N)(1-r_1) - r_1(1-r_1^N)(1-r_2)}{r_2 - r_1}.$$

Or, $|r_1| < |r_2| < 1$ d'après la première partie. Donc :

$$\lim_{N\to+\infty} r_1^N = \lim_{N\to+\infty} r_2^N = 0.$$

Par opérations, l'expression précédente donne :

$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{r_2(1-r_1) - r_1(1-r_2)}{r_2 - r_1}.$$

Enfin, $\frac{r_2(1-r_1) - r_1(1-r_2)}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - r_2 r_1 - r_1 + r_2 r_1}{r_2 - r_1} = 1.$

Finalement, $\boxed{\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.}$

21. Notons T_N la somme partielle d'indice N de $\sum_{n\geq 1}(n+1)a_n$, pour tout $N \geq 1$.

Alors par linéarité:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, T_N = \sum_{k=1}^{N}(k+1)a_k = \sum_{k=1}^{N} k a_k + \sum_{k=1}^{N} a_k = S_N + \sum_{k=1}^{N} k a_k = S_N + V_N.$$

où on a posé $V_N = \sum_{k=1}^{N} k a_k$ pour tout entier $N > 0$.

Par linéarité, avec la formule obtenue question 9 :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, V_N = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left(r_2 \sum_{k=1}^{N} k r_2^{k-1} - r_1 \sum_{k=1}^{N} k r_1^{k-1}\right).$$

On reconnait les sommes partielles de deux séries géométriques dérivées d'ordre 1, de raisons r_1 et r_2 non égales à 1, donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} j r_2^{j-1} = \frac{1}{(1-r_2)^2} \text{ et } \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} j r_1^{j-1} = \frac{1}{(1-r_1)^2}$$

(car on a bien $N+1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$).

Par opérations sur les limites :

$$V_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2 \frac{1}{(1-r_2)^2} - r_1 \frac{1}{(1-r_1)^2}).$$

Par somme, et vu que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$:

$$T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1 + \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2 \frac{1}{(1-r_2)^2} - r_1 \frac{1}{(1-r_1)^2}) = 1 + \frac{p^2}{r_2 - r_1} \frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2}.$$

A l'aide des résultats des questions 17 et 18 :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{p^2}{r_2 - r_1} \frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} &= 1 + p^2 \frac{1}{((1-r_1)(1-r_2))^2} \frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{r_2 - r_1} \\ &= 1 + \frac{1}{p^2}(1+pq) \\ &= \frac{p^2 + 1 + p(1-p)}{p^2} = \frac{1+p}{p^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1+p}{p^2}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1}(n+1)a_n \text{ converge, et sa somme vaut } \frac{1+p}{p^2}.}$$

— *Fin du corrigé* —