Lycée Hoche
ECG1 A

2023-2024
Mathématiques

Concours blanc 2

*Devoir du **25 avril 2024**.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier certaines "matrices aléatoires". Les parties de ce problème sont liées, mais la partie III de cet exercice n'utilise pas de résultats des parties I et II.

Dans tout ce problème, on fixe un réel $p \in]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Partie I : Études d'une expérience aléatoire

On dispose d'une pièce P_1 équilibrée, et d'une pièce P_2 dont la probabilité de faire Pile est p et la probabilité de faire Face est $q = 1 - p$. Les différents lancers de ces pièces sont bien sûr considérés mutuellement indépendants.

On effectue alors l'expérience aléatoire E suivante :

- On lance une fois la pièce P_1. On note $\epsilon = 1$ si la pièce a fait Pile, et $\epsilon = -1$ sinon. Puis,
- on lance indéfiniment la pièce P_2. On note le nombre N de côtés Face obtenus avant l'apparition du premier Pile. Par exemple, si la suite des lancers commence par $F, F, P, \ldots$, alors on aura posé $N = 2$.
- Le résultat R de cette expérience aléatoire est l'entier relatif $R = \epsilon \times N$ obtenu en faisant le produit des deux nombres ϵ et N notés lors de ces étapes.

On admet qu'il est impossible (en pratique) que la pièce P_2 ne tombe jamais sur Pile, de sorte que N est bien défini.

On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

Les notations ϵ, N et R désignant les résultats des étapes de ces expériences seront utilisées dans la suite pour décrire des événements de manière succincte. Par exemple, l'événement "$\epsilon = -1$" désigne l'événement "La pièce P_1 tombe sur Face". L'événement "$N = 2$" désigne "La pièce P_2 est tombée exactement deux fois sur Face avant son premier Pile".

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(\text{“}N = 0\text{”})$.

   (b) En déduire $\mathbb{P}(\text{“}R = 0\text{”}) = p$.

   (c) Que dire des événements “$\epsilon = 1$" et “$N > 0$" ? En déduire $\mathbb{P}_{\text{“}\epsilon=1\text{”}}(\text{“}N > 0\text{”})$.

   (d) En déduire la probabilité de : "R est strictement positif".

2. On considère, pour tout entier naturel k non nul, l'événement A_k : "le k-ième lancer de la pièce P_2 tombe sur Pile".

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement "$N = n$" en fonction d'événements de la forme A_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire $\mathbb{P}(\text{“}N = n\text{”})$ pour tout entier naturel n non nul.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Que dire des événements "$\epsilon = 1$" et "$N = |n|$" ?

   (b) Déduire des questions précédentes :

$$\mathbb{P}(\text{“}R = n\text{”}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} q^{|n|} p \text{ si } n \neq 0 \\ p \text{ si } n = 0 \end{cases}.$$

4. Soit n un entier naturel.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\text{“}N > n\text{”}) = q^{n+1}$.

   (b) En déduire $\mathbb{P}(\text{“}R > n\text{”})$ en fonction de n, p et q.

Partie II : Études de deux répétitions

On effectue deux répétitions indépendantes E_1 et E_2 de l'expérience aléatoire E.

On note, conformément aux notations ci-dessus, ϵ_1, N_1 et R_1 les résultats des étapes de la répétition E_1, et ϵ_2, N_2 et R_2 les résultats des étapes de la répétition E_2.

On admet qu'il existe un espace probabilisé (toujours noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) modélisant l'expérience aléatoire consistant à effectuer ces deux répétitions E_1 et E_2 de E.

5. (a) Quelle est la probabilité que R_1 et R_2 soient tous nuls?

   (b) Déterminer $\mathbb{P}(\text{“}\epsilon_1 = \epsilon_2\text{”})$ à l'aide d'un système complet d'événement bien choisi.

   (c) Montrer que la probabilité que R_1 et R_2 soient non nuls et de même signe est $\dfrac{q^2}{2}$.

6. On admet que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\text{“}N_2 = n\text{”})\mathbb{P}_{\text{“}N_2=n\text{”}}(\text{“}R_1 > n\text{”})$ converge et que :

$$\mathbb{P}(\text{“}R_1 > N_2\text{”}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\text{“}N_2 = n\text{”})\mathbb{P}_{\text{“}N_2=n\text{”}}(\text{“}R_1 > n\text{”}).$$

   Calculer $\mathbb{P}(\text{“}R_1 > N_2\text{”})$.

7. (a) Déterminer $\mathbb{P}_{\text{“}N_1=0\text{”}}(\text{“}N_1 = N_2\text{”})$.

   (b) On admet que $\mathbb{P}_{\text{“}N_1\neq 0\text{”}}(\text{“}N_1 = N_2\text{”}) = \dfrac{p^2 q}{1-q^2}$.

   Déterminer $\mathbb{P}_{\text{“}N_1\neq 0\text{”}}(\text{“}R_1 = R_2\text{”})$.

   (c) En déduire que $\mathbb{P}(\text{“}R_1 = R_2\text{”}) = p^2 \dfrac{1-\dfrac{q^2}{2}}{1-q^2}$.

Partie III : Propriétés de certaines matrices

Pour tous réels a et b, on pose $M_{a,b} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$.

8. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.

9. Soient a et b des réels distincts.

   (a) Résoudre l'équation matricielle $M_{a,b}X = aX$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que $S_a = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \,|\, M_{a,b}X = aX\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.

10. (a) Calculer M^2 et M^3.

    (b) Conjecturer une formule donnant M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et la démontrer.

11. Écrire une fonction `Python` d'entête `def M(a,b):` prenant en entrée deux réels `a` et `b` et renvoyant en sortie la matrice $M_{\mathtt{a},\mathtt{b}}$ (de type `np.ndarray`).

12. Quelle est la sortie de la fonction `Python` ci-dessous, d'entête `def Mystere(M,N):`, prenant en entrée deux matrices `M` et `N` (de type `np.ndarray`)?

```
import numpy as np
def Mystere(M,N):
        if np.shape(M) != np.shape(N):
                return(False)
        n,p=np.shape(M)
        for i in range(n):
                for j in range(p):
                        if M[i,j] != N[i,j]:
                                return(False)
        return(True)
```

13. Écrire une fonction `Python` d'entête `def Test(a,b,X):` prenant en entrée des réels `a` et `b` ainsi qu'une matrice `X` de taille (2,1), et renvoyant en sortie `True` si l'égalité $M_{\mathtt{a},\mathtt{b}}\mathtt{X} = 2\mathtt{X}$ est vraie, et `False` sinon.

Partie IV : Une matrice aléatoire

Dans le contexte de la partie II, on effectue les deux répétitions E_1 et E_2 de l'expérience E. On conserve les notations de la partie 2, et on considère la matrice :

$$M = M_{R_1,R_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 - R_2 \\ R_1 - R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice dépend du résultat aléatoire des expériences E_1 et E_2 : on dit que c'est une matrice aléatoire.

On note aussi $S = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \,|\, MX = R_1 X\}$.

14. (*a*) Exprimer l'événement "M est inversible" en fonction d'événements faisant intervenir R_1 et R_2.

    (*b*) Quelle est la probabilité que M soit inversible?

15. Quelle est la probabilité que M soit diagonale?

16. Quelle est la probabilité que S soit de dimension 1?

17. Quelle est la probabilité que M soit à coefficients strictement positifs?

18. Déterminer la probabilité que l'équation matricielle $MX = X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ ait une infinité de solutions.

Exercice 2 *Problème*

Le but de ce problème est de prouver la belle et curieuse égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Les parties de ce problème sont toutes liées.

Partie I : Études préliminaires

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$.

   (a) Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, et expliciter ce prolongement.

   Dans toute la suite du sujet, on note encore f ce prolongement par continuité.

   (c) En utilisant la dérivabilité de l'exponentielle, montrer que $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

   (d) Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)}$.

   (e) En déduire que f admet une tangente verticale en 0.

2. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est un réel bien défini.

   Dans toute la suite du sujet, on notera $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x$ ce réel.

3. Pour quels entiers naturels $n \geq 1$ l'inégalité $\dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ est-elle vraie? En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ converge.

Partie II : Étude de fonctions

Pour tous entiers naturels p et q, on pose $u_{p,q}(x) = x^p \ln(x)^q$, avec la convention $u_{p,0}(x) = x^p$.

4. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \neq 0$.

   (a) Justifier que la fonction $u_{p,q}$ ainsi définie est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que si $q > 0$, alors $u_{p,q}$ est prolongeable par continuité en 0, et expliciter ce prolongement. Que dire si $q = 0$?

Dans toute la suite du sujet, on note toujours $u_{p,q}$ ce prolongement par continuité.

5. Montrer que $u_{1,1}$ est dérivable sur $]0,1]$ et dresser son tableau de variation sur $]0,1]$.

6. Montrer :

$$\forall x \in [0,1], |u_{1,1}(x)| \leq \frac{1}{e}.$$

Partie III : Calculs d'intégrales

On pose, pour tous entiers naturels p et q et sous réserve de bonne définition :

$$I_{p,q} = \int_0^1 u_{p,q}(x)\mathrm{d}x.$$

7. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q}$ est bien défini.

   (b) Montrer que $I_{p,0}$ est bien défini pour tout entier naturel p, et calculer $I_{p,0}$.

8. (a) A l'aide d'une intégration par partie, justifier que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall t \in]0,1], \int_t^1 x^p \ln(x)^{q+1}\mathrm{d}x = -\frac{t^{p+1}\ln(t)^{q+1}}{p+1} - \frac{q+1}{p+1}\int_t^1 x^p \ln(x)^q \mathrm{d}x.$$

(b) Soient p et q des entiers naturels tels que $p \neq 0$. Justifier que la fonction $H_{p,q} : t \mapsto \int_t^1 u_{p,q}(x)\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, et calculer $H'_{p,q}(x)$ pour tout $x \in]0,1]$. Que dire de la continuité de $H_{p,q}$ sur $[0,1]$?

(c) Déduire des questions précédentes :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1} I_{p,q}.$$

(d) À l'aide de cette relation et sans utiliser le résultat de la question suivante, écrire le code d'une fonction `Python` d'entête `def I(p,q):` :

- prenant en entrée deux entiers naturels `p` et `q` tels que $\texttt{p} \neq 0$ ou $\texttt{q} = 0$,
- renvoyant en sortie $I_{\texttt{p},\texttt{q}}$

(e) Montrer à l'aide d'une récurrence :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

(f) En déduire la valeur de $I_{n,n} = \int_0^1 u_{n,n}(x)\mathrm{d}x$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. La formule est-elle toujours valable pour $n = 0$?

Partie IV : Majoration d'un reste

9. Question de cours : Définir, pour x réel, la série exponentielle de paramètre x et donner sa somme (sans démonstration).

10. Soit $x \in [0,1]$.

(a) Justifier que si $x > 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge absolument. Dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de $f(x)$.

(b) Montrer que le résultat de la question précédente est toujours vrai si $x = 0$.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel N, la série $\sum_{n \geq N} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge absolument.

On notera alors $R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$.

(d) Exprimer $f(x) - R_N(x)$ en fonction de réels $u_{n,n}(x)$, pour $0 \leq n \leq N-1$. En déduire que $R_N : x \mapsto R_N(x)$ définit une fonction continue sur $[0,1]$.

11. Soit $N \geq 1$ un entier naturel.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq N} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}$ converge.

(b) Montrer, à l'aide de résultats de la partie II, que :

$$\forall x \in [0,1], |R_N(x)| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}$$

Rappel : si une série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ *converge absolument, alors :*

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$$

(inégalité triangulaire pour les séries).

(c) En déduire :

$$0 \leq \left| \int_0^1 R_N(x)\mathrm{d}x \right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}.$$

12. (a) Justifier que pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} = e^{\frac{1}{e}} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}.$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} = 0$.

(c) Qu'en déduire sur $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_0^1 R_N(x)\mathrm{d}x$?.

Partie V : Conclusion

13. Montrer que pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} + \int_0^1 R_N(x)\mathrm{d}x.$$

14. En déduire que $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge, et que sa somme vaut

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x.$$

15. Conclure la démonstration de l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Partie VI : Approximation numérique de $\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x$.

On souhaite utiliser cette formule afin d'avoir une approximation numérique de $\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x$.

On pose, pour tout entier naturel N, $M_N = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}$.

16. À l'aide du résultat de la question 12(a), écrire le code d'une fonction `Python` d'entête `def MajorantR(N):` prenant en entrée un entier naturel `N` et renvoyant en sortie la valeur de $M_{\mathtt{N}}$

17. Justifier que :

$$\forall N \geq 2, \left| \int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n} \right| \leq M_N.$$

18. Recopier et compléter le code suivant pour qu'il affiche une approximation à 10^{-6} près de $\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x$ (à la suite du code précédent).

```
S=1
N=1
while MajorantR(N) ... :
        N=...
        S=S+...
print(S)
```

— Fin de l'énoncé —