Corrigé : CB02. (Devoir du 25/04)

Exercice 1

1.a. "$N=0$" est l'événement : "le premier lancer de la pièce P_2 tombe sur Pile".

On a donc $\underline{\mathbb{P}(\text{"}N=0\text{"}) = p}$

1.b. On a $R = \varepsilon \times N$, et ε valant -1 ou 1 :

$$\underline{\mathbb{P}(\text{"}R=0\text{"}) = \mathbb{P}(\text{"}N=0\text{"}) = p.}$$

1.c. "$\varepsilon=1$" ne dépend que du lancer de la pièce P_1, et "$N>0$" ne dépend que des lancers de P_2.

Par indépendance des lancers, "$\varepsilon=1$" et "$N>0$" sont indépendants.

Par théorème, on a donc :

$$\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=1\text{"}}(\text{"}N>0\text{"}) = \mathbb{P}(\text{"}N>0\text{"}). \quad \left(\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon=1\text{"}) = \frac{1}{2} \neq 0\right).$$

Enfin, N ne prenant que des valeurs entières positives, "$N=0$" est l'événement contraire de "$N>0$". Donc :

$$\underline{\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=1\text{"}}(\text{"}N>0\text{"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"}N=0\text{"}) = 1-p = q}$$

1.d. Par construction, $\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=-1\text{"}}(\text{"}R>0\text{"}) = 0$ (cette probabilité conditionnelle est bien définie car $\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon=-1\text{"}) = \frac{1}{2} \neq 0$, et si $\varepsilon=-1$, alors $R \leq 0$ car $\begin{cases} R = \varepsilon N \\ N \geq 0 \end{cases}$).

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement ("$\varepsilon=1$", "$\varepsilon=-1$") :

$$\mathbb{P}(\text{"}R>0\text{"}) = \mathbb{P}(\text{"}\varepsilon=1\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=1\text{"}}(\text{"}R>0\text{"}) + \mathbb{P}(\text{"}\varepsilon=-1\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=-1\text{"}}(\text{"}R>0\text{"})$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=1\text{"}}(\text{"}R>0\text{"}).$$

Enfin, $\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=1\text{"}}(\text{"}R>0\text{"}) = \mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon=1\text{"}}(\text{"}N>0\text{"}) = q$ car si $\varepsilon = 1$, alors $R = N$.

Finalement, $\underline{\mathbb{P}(\text{"}R>0\text{"}) = \frac{q}{2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.a. "$N=n$" est réalisé ssi les n premiers lancers tombent sur Face et le $(n+1)$-ième lancer tombe sur Pile.

Donc :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{"}N=n\text{"} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n \cap A_{n+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) \cap A_{n+1}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sont mutuellement indépendants par indépendance des lancers successifs de la pièce P_2.

Donc $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n, A_{n+1}$ le sont aussi, d'où :

$$\mathbb{P}(\text{"}N=n\text{"}) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) \cap A_{n+1}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\bar{A}_i)\right) \times \mathbb{P}(A_{n+1})$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{n} q\right) \times p = q^n p.$$

Donc $\underline{\mathbb{P}(\text{"}N=n\text{"}) = q^n p, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

3.a. <u>"$\varepsilon=1$" et "$N=|n|$" sont indépendants.</u>

En effet, $\begin{cases} \text{"}\varepsilon=1\text{" ne dépend que du lancer de } P_1 \\ \text{"}N=|n|\text{" ne dépend que des lancers de } P_2 \end{cases}$,

et les lancers de ces pièces sont indépendants.

b. <u>1er cas</u> : Si $n=0$, on a déjà montré $\mathbb{P}(\text{"}R=n\text{"}) = p$.

② <u>2e cas</u> : Si $n>0$, alors "$R=n$" = "$\varepsilon=1$" ∩ "$N=n$".

D'après la formule des probabilités composées ($\mathbb{P}("\varepsilon=1")=\frac{1}{2}\neq 0$):

$$\mathbb{P}("R=n") = \mathbb{P}("\varepsilon=1")\,\mathbb{P}_{"\varepsilon=1"}("N=n")$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}("N=n")$$ (par indépendance de "$\varepsilon=1$" et "$N=n$", par 3.a.)

$$= \frac{1}{2}q^n p = \frac{1}{2}q^{|n|}p$$ (d'après 2b., et car $n>0$)

<u>3e cas</u> : Si $n<0$, alors "$R=n$" = "$\varepsilon=-1$" ∩ "$N=|n|$".

On a donc de même :

$$\mathbb{P}("R=n") = \mathbb{P}("\varepsilon=-1")\,\mathbb{P}_{"\varepsilon=-1"}("N=|n|")$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}("N=|n|") = \frac{1}{2}q^{|n|}p$$ (car $|n|>0$).

<u>Conclusion</u> : Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}("R=n") = \begin{cases} \frac{1}{2}q^{|n|}p & \text{si } n\neq 0 \\ p & \text{si } n=0 \end{cases}.$$

4.a. N ne pouvant être qu'un entier,

"$N>n$" = "$N\geq n+1$".

Or, "$N\geq n+1$" est réalisé si et seulement si les $n+1$ premiers lancers tombent sur Face.

Donc : $\mathbb{P}("N>n") = \mathbb{P}(\bar{A}_1\cap\ldots\cap\bar{A}_{n+1}) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(\bar{A}_1)\cdots\mathbb{P}(\bar{A}_{n+1})$

$= q^{n+1}$

(*) : Par indépendance des lancers, $\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_{n+1}$ sont mutuellement indépendants.

4.b. Si "$\varepsilon=-1$" est réalisé, alors "$R<0$" est réalisé et "$R>n$" n'est donc pas réalisé ($n\geq 0$).

Si "$\varepsilon=1$" est réalisé, alors "$R>n$" est réalisé si et seulement si "$N>n$" l'est.

Ainsi : "$R>n$" = "$\varepsilon=1$" $\cap$ "$N>n$".

"$\varepsilon=1$" et "$N>n$" étant indépendants, par le même argument qu'en 3a :

$\mathbb{P}(\text{"}R>n\text{"})=\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon=1\text{"})\,\mathbb{P}(\text{"}N>n\text{"})$ d'où, avec 4a :

$$\underline{\mathbb{P}(\text{"}R>n\text{"})=\frac{1}{2}q^{n+1}}$$

5.a. D'après la question 1b, et E_1, E_2 étant des répétitions de E :

$$\mathbb{P}(\text{"}R_1=0\text{"})=\mathbb{P}(\text{"}R_2=0\text{"})=p.$$

Les répétitions E_1 et E_2 de E étant indépendantes,

et $\begin{cases} R_1 \text{ ne dépendant que de } E_1 \\ R_2 \quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad E_2 \end{cases}$, "$R_1=0$" et "$R_2=0$" sont indépendants.

Ainsi, $\underline{\mathbb{P}(\text{"}R_1=R_2=0\text{"})=\mathbb{P}(\text{"}R_1=0\text{"})\,\mathbb{P}(\text{"}R_2=0\text{"})=p^2}$.

b. ("$\varepsilon_1=1$", "$\varepsilon_1=-1$") est un système complet d'événements, de probabilités $\frac{1}{2}\neq 0$, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"})=\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_1=1\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon_1=1\text{"}}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"})+\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_1=-1\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon_1=-1\text{"}}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"})$$

On a de plus $\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon_1=1\text{"}}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"})=\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon_1=1\text{"}}(\text{"}\varepsilon_2=1\text{"})=\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_2=1\text{"})=\frac{1}{2}$.

(par indépendance de E_1 et E_2), et de même $\mathbb{P}_{\text{"}\varepsilon_1=-1\text{"}}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"})=\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_2=-1\text{"})=\frac{1}{2}$.

Finalement, $\underline{\mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$.

③

5.c. R_1 et R_2 sont non nuls et de même signe si et seulement si : $\begin{cases} \text{"}\varepsilon_1 = \varepsilon_2\text{" est réalisé} \\ \text{"}N_1 > 0\text{" est réalisé} \\ \text{"}N_2 > 0\text{"} \quad \text{//} \end{cases}$.

Notant $\mathcal{P}$ l'événement "R_1 et R_2 sont non nuls et de même signe", on a donc :

$$\mathcal{P} = \text{"}\varepsilon_1 = \varepsilon_2\text{"} \cap \text{"}N_1 > 0\text{"} \cap \text{"}N_2 > 0\text{"}.$$

Enfin, les événements "$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$", "$N_1 > 0$" et "$N_2 > 0$" sont (mutuellement) indépendants car $\begin{cases} \text{"}\varepsilon_1 = \varepsilon_2\text{" ne dépend que des lancers de } P_1 \text{ dans } E_1 \text{ et } E_2, \\ \text{"}N_1 > 0\text{"} \quad \text{//} \quad \text{//} \quad \text{de } P_2 \text{ dans } E_1, \\ \text{"}N_2 > 0\text{"} \quad \text{//} \quad \text{//} \quad \text{de } P_2 \text{ dans } E_2. \end{cases}$

On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathcal{P}) = \mathbb{P}(\text{"}\varepsilon_1 = \varepsilon_2\text{"})\, \mathbb{P}(\text{"}N_1 > 0\text{"})\, \mathbb{P}(\text{"}N_2 > 0\text{"})$$

(par 5b)) $\rightarrow = \frac{1}{2}\,(1 - \mathbb{P}(\text{"}N_1 = 0\text{"}))(1 - \mathbb{P}(\text{"}N_2 = 0\text{"})) \underset{(\text{par } 1a)}{=} \frac{1}{2}(1-p)(1-p) = \frac{q^2}{2}$.

(par passage au complémentaire)

On a bien montré $\mathbb{P}(\mathcal{P}) = \frac{q^2}{2}$.

---

6. D'après la partie I,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\text{"}N_2 = n\text{"}) = \begin{cases} p & \text{si } n = 0, \\ q^n p & \text{sinon} \end{cases} = q^n p.$$

De plus, par indépendance des répétitions E_1 et E_2 de E :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{\text{"}N_2 = n\text{"}}(\text{"}R_1 > n\text{"}) = \mathbb{P}(\text{"}R_1 > n\text{"}) \underset{(\text{par } 4b)}{=} \frac{1}{2} q^{n+1}.$$

D'après l'énoncé, on a donc :

$$\mathbb{P}(\text{"}R_1 > N_2\text{"}) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n p \times \frac{1}{2} q^{n+1}.$$

Par linéarité :

$$\mathbb{P}(\text{"}R_1 > N_2\text{"}) = \frac{pq}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \frac{pq}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(q^2)^n.$$

On reconnait une série géométrique de raison $q^2 \in]-1,1[$, donc :

$$\underline{\mathbb{P}(\text{"}R_1 > N_2\text{"}) = \frac{pq}{2} \times \frac{1}{1-q^2}}$$

Rq : On pouvait simplifier encore : $\frac{pq}{2} \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{\cancel{p}q}{2} \times \frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} = \frac{q}{2(1+q)}$.

7. a) Si "$N_1 = 0$" est réalisé, alors "$N_1 = N_2$" est réalisé ssi "$N_2 = 0$" est réalisé. Donc $\mathbb{P}_{\text{"}N_1=0\text{"}}(\text{"}N_1 = N_2\text{"}) = \mathbb{P}_{\text{"}N_1=0\text{"}}(\text{"}N_2=0\text{"}) \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(\text{"}N_2 = 0\text{"}) \overset{(2)}{=} p.$

(1) : "$N_1 = 0$" et "$N_2 = 0$" sont indépendants.

(2) : D'après 1a.

On a donc montré $\underline{\mathbb{P}_{\text{"}N_1=0\text{"}}(\text{"}N_1 = N_2\text{"}) = p}$.

b) Montrons $\mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}}(\text{"}R_1 = R_2\text{"}) = \mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}}(\text{"}N_1 = N_2\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}\cap\text{"}N_1=N_2\text{"}}(\text{"}\varepsilon_1 = \varepsilon_2\text{"})$.

Par définition, $\mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}}(\text{"}R_1 = R_2\text{"}) = \dfrac{\mathbb{P}(\text{"}N_1\neq 0\text{"}\cap\text{"}R_1=R_2\text{"})}{\mathbb{P}(\text{"}N_1 \neq 0\text{"})}$. (1)

Mais "$N_1 \neq 0$" $\cap$ "$R_1 = R_2$" = "$N_1 \neq 0$" $\cap$ "$N_1 = N_2$" $\cap$ "$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$"

De plus, $\mathbb{P}(\text{"}N_1\neq 0\text{"}\cap\text{"}N_1=N_2\text{"}) = \mathbb{P}(\text{"}N_1\neq 0\text{"})\mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}}(\text{"}N_1 = N_2\text{"}) = q \times \frac{p^2 q}{1-q^2} \neq 0$, d'après le résultat admis.

La formule des probabilités composées donne donc :

$$\mathbb{P}(\text{"}N_1\neq 0\text{"}\cap\text{"}N_1=N_2\text{"}\cap\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"}) = \mathbb{P}(\text{"}N_1\neq 0\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}}(\text{"}N_1=N_2\text{"})\,\mathbb{P}_{\text{"}N_1\neq 0\text{"}\cap\text{"}N_1=N_2\text{"}}(\text{"}\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{"}).$$

En divisant par $\mathbb{P}(\text{"}N_1 \neq 0\text{"})$, avec (1), il vient :

$$\mathbb{P}_{"N_1\neq 0"}("R_1=R_2") = \mathbb{P}_{"N_1\neq 0"}("N_1=N_2")\,\mathbb{P}_{"N_1\neq 0"\cap"N_1=N_2"}("\varepsilon_1=\varepsilon_2").$$

Mais "$N_1\neq 0$"$\cap$"$N_1=N_2$" ne dépendant pas des lancers des pièces P_1, "$N_1\neq 0$"$\cap$"$N_1=N_2$" et "$\varepsilon_1=\varepsilon_2$" sont indépendants.

Donc, avec l'égalité admise :

$$\mathbb{P}_{N_1\neq 0"}("R_1=R_2") = \frac{p^2q}{1-q^2}\times \mathbb{P}("\varepsilon_1=\varepsilon_2") = \frac{1}{2}\,\frac{p^2q}{1-q^2}.$$

c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE ("$N_1=0$", "$N_1\neq 0$"), ces événements étant de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}("R_1=R_2") = \mathbb{P}("N_1=0")\,\mathbb{P}_{"N_1=0"}("R_1=R_2") + \mathbb{P}("N_1\neq 0")\,\mathbb{P}_{"N_1\neq 0"}("R_1=R_2").$$

Or, d'après les questions précédentes :

$$\mathbb{P}("N_1=0")=p,\quad \mathbb{P}("N_1\neq 0")=q,\quad \mathbb{P}_{"N_1\neq 0"}("R_1=R_2") = \frac{1}{2}\,\frac{p^2q}{1-q^2},$$

et $\mathbb{P}_{"N_1=0"}("R_1=R_2") \overset{(*)}{=} \mathbb{P}_{"N_1=0"}("N_1=N_2") = p$.

(*) : si "$N_1=0$" est réalisé, "$R_1=R_2$" est réalisé ssi "$N_1=N_2$" l'est.

Finalement :

$$\mathbb{P}("R_1=R_2") = q\times\frac{1}{2}\,\frac{p^2q}{1-q^2} + p^2 = \frac{p^2}{1-q^2}\left(\frac{q^2}{2}+1-q^2\right) = p^2\,\frac{1-\frac{q^2}{2}}{1-q^2}.$$

8. $\det(M_{a,b}) = \left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a-b)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)$

$= \frac{1}{4}\times 4ab = ab$, pour tous réels a et b.

Donc <u>$M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $ab\neq 0$.</u>

9. a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$M_{a,b} X = aX \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(a+b)x_1 + \frac{1}{2}(a-b)x_2 = a x_1 \\ \frac{1}{2}(a-b)x_1 + \frac{1}{2}(a+b)x_2 = a x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 2a x_1 \\ (a-b)x_1 + (a+b)x_2 = 2a x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (b-a)x_1 + (a-b)x_2 = 0 \\ (a-b)x_1 + (b-a)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (b-a)x_1 + (a-b)x_2 = 0 \\ 0 = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff x_1 = -\frac{(a-b)}{b-a} x_2 = x_2 \quad \text{car } b-a \neq 0 \text{ par hypothèse } (a \neq b).$$

L'ensemble des solution de cette équation est $S_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

b) D'après la question précédente,

$S_a = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$.

Ainsi, S_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de S_a, et cette famille est libre car constituée d'un unique vecteur non nul, donc :

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de S_a, et $\dim(S_a) = 1$.

10. a) Posant le calcul, il vient :

$$M_{a,b}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & a^2-b^2 \\ a^2-b^2 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \text{ et } M_{a,b}^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^3+b^3 & a^3-b^3 \\ a^3-b^3 & a^3+b^3 \end{pmatrix}.$$

⚠ Faute d'énoncé : oubli des indices a et b.

(3)

b. Montrons par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: " $M_{a,b}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n+b^n & a^n-b^n \\ a^n-b^n & a^n+b^n \end{pmatrix}$ ".

Initialisation : $M_{a,b}^0 = I_2$, et $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^0+b^0 & a^0-b^0 \\ a^0-b^0 & a^0+b^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = I_2$

donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$ et montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

D'après $\mathcal{H}(n)$, $M_{a,b}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n+b^n & a^n-b^n \\ a^n-b^n & a^n+b^n \end{pmatrix}$ donc :

$$M_{a,b}^{n+1} = M_{a,b}^n M_{a,b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n+b^n & a^n-b^n \\ a^n-b^n & a^n+b^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (a^n+b^n)(a+b)+(a^n-b^n)(a-b) & (a^n+b^n)(a-b)+(a^n-b^n)(a+b) \\ (a^n-b^n)(a+b)+(a^n+b^n)(a-b) & (a^n-b^n)(a-b)+(a^n+b^n)(a+b) \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{cases} (a^n+b^n)(a+b)+(a^n-b^n)(a-b) = a^{n+1}+a^nb+b^na+b^{n+1}+a^{n+1}-a^nb-b^na+b^{n+1} = 2(a^{n+1}+b^{n+1}) \\ (a^n-b^n)(a+b)+(a^n+b^n)(a-b) = a^{n+1}+a^nb-b^na-b^{n+1}+a^{n+1}-a^nb+b^na-b^{n+1} = 2(a^{n+1}-b^{n+1}) \end{cases}$

On a donc :

$$M_{a,b}^{n+1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(a^{n+1}+b^{n+1}) & 2(a^{n+1}-b^{n+1}) \\ 2(a^{n+1}-b^{n+1}) & 2(a^{n+1}+b^{n+1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^{n+1}+b^{n+1} & a^{n+1}-b^{n+1} \\ a^{n+1}-b^{n+1} & a^{n+1}+b^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ceci démontre $\mathcal{H}(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a donc montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{a,b}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n+b^n & a^n-b^n \\ a^n-b^n & a^n+b^n \end{pmatrix}$.

11.
```python
import numpy as np
def M(a,b):
    Mab = [[a+b, a-b], [a-b, a+b]]
    Mab = np.array(Mab)
    return ((1/2)*Mab)
```

12. Cette fonction appliquée en (M,N) renvoie Faux (False) si et seulement si : M et N n'ont pas la même taille ou ont deux coefficients de même indice distincts.
Sinon, elle renvoie Vrai (True)
Sa sortie est donc : True si M et N sont égales,
False sinon.

13.
```python
def Test(a,b,X):  #numpy importé dans le code de M(a,b)
    M = M(a,b)
    MX = np.dot(M,X)
    rep = Mystere(MX, 2*X)
    return(rep)
```

14. a) D'après la question 8, $M = M_{R_1,R_2}$ est inversible si et seulement si $R_1 R_2 \neq 0$, donc :
"M est inversible" = "$R_1 \neq 0$" $\cap$ "$R_2 \neq 0$".

b) D'après la question précédente :

$\mathbb{P}$("M est inversible") = $\mathbb{P}$("$R_1 \neq 0$" $\cap$ "$R_2 \neq 0$").
Par indépendance des répétitions E_1 et E_2 de E,

⑥ "$R_1 \neq 0$" et "$R_2 \neq 0$" sont indépendants.

Donc :

$$\mathbb{P}(\text{"M est inversible"}) = \mathbb{P}(\text{"}R_1 \neq 0\text{"})\,\mathbb{P}(\text{"}R_2 \neq 0\text{"})$$

$$= \left(1 - \mathbb{P}(\text{"}R_1 = 0\text{"})\right)\left(1 - \mathbb{P}(\text{"}R_2 = 0\text{"})\right) \quad \text{(par passage au complémentaire)}$$

$$= (1-p)^2 = q^2 \quad \text{(d'après 1b)}.$$

La probabilité de "M est inversible" est q^2.

15. Vu les coefficients de M, l'événement "M est diagonale" est l'événement "$R_1 = R_2$".

D'après 7c), on a donc :

$$\mathbb{P}(\text{"M est diagonale"}) = p^2 \times \frac{1 - \frac{q^2}{2}}{1-q^2}.$$

16. On a vu question 9b que si a et b sont deux réels distincts, alors $\{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid M_{a,b}X = aX\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1.

Donc si "$R_1 \neq R_2$" est réalisé, alors "S est de dimension 1" l'est.

Réciproquement, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $a = b$, alors :

$$M_{a,b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ M_{a,b}X = aX$$

donc dans ce cas, $S_a = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Ainsi, si "$R_1 = R_2$" est réalisé, alors "S est de dimension 1" n'est pas réalisé.

En conclusion :

"S est de dimension 1" = "$R_1 \neq R_2$".

Donc par passage au complémentaire :

$\mathbb{P}$("S est de dimension 1") $= 1 - \mathbb{P}(``R_1 = R_2") = 1 - p^2 \dfrac{1-\frac{q^2}{2}}{1-q^2}$.

17.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$M_{a,b}$ est à coefficients strictement positifs si et seulement si :

$\begin{cases} a+b>0 \\ a-b>0 \end{cases}$ (car $\frac{1}{2} > 0$).

Or, $\begin{cases} a+b>0 \\ a-b>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a>-b \\ a>b \end{cases} \iff a > \max(-b,b) \iff a > |b|$.

Donc "M est à coefficients str. positifs" = "$R_1 > |R_2|$" = "$R_1 > N_2$".

D'après 6 :

$\mathbb{P}$("M est à coefficients strictement positifs") $= \dfrac{pq}{2} \times \dfrac{1}{1-q^2}$.

---

18. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$M_{a,b}X = X \iff M_{a,b}X - X = 0_{2,1} \iff (M_{a,b} - I_2)X = 0_{2,1}$.

Les solutions de (S) : $M_{a,b}X = X$ sont donc les solutions de (S') : $(M_{a,b} - I_2)X = 0_{2,1}$.

Notons (L') le système linéaire de forme matricielle (S').

(L') est homogène donc admet une solution (au moins).

(7) Un système linéaire admettant 0, 1 ou une infinité de solutions, et (L') étant carré :

(S) admet une infinité de solutions si et seulement si :
(S') admet " " , si et seulement si :
(L') admet " " , si et seulement si
(L') n'est pas de Cramer (car (L') ayant une solution, il a 1 ou une infinité de solutions).

Enfin, (L') n'est pas de Cramer ssi $M_{a,b} - 2I_2$ n'est pas inversible par théorème ($M_{a,b} - I_2$ est la matrice associée au système linéaire carré (L')).

Finalement, (S) a une infinité de solutions si et seulement si $M_{a,b} - I_2$ n'est pas inversible.

Ainsi, "$MX = X$ a une infinité de solutions" est l'événement :

" $M - I_2$ est non inversible ".

Or, $\det(M - I_2) = \left(\frac{R_1+R_2}{2} - 1\right)^2 - \left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^2 - (R_1+R_2) + 1 - \left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2$$

$$= \cdots = R_1R_2 - (R_1+R_2) + 1 = (1-R_1)(1-R_2).$$

Or, $\mathbb{P}("(1-R_1)(1-R_2) \neq 0") = \mathbb{P}("R_1 \neq 1" \cap "R_2 \neq 1")$

$= \mathbb{P}("R_1 \neq 1")\mathbb{P}("R_2 \neq 1")$ (indépendance de E_1 et E_2)

$= (1 - \mathbb{P}("R_1 = 1")) \times (1 - \mathbb{P}("R_2 = 1"))$.

Inutile : utiliser plutôt 3b.

Enfin,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(``R_1 = 1") &= \mathbb{P}(``\varepsilon_1 = 1" \cap ``N_1 = 1") \\ &= \mathbb{P}(``\varepsilon_1 = 1")\,\mathbb{P}(``N_1 = 1") \quad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(``N_1 = 1"), \end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(``N_1 = 1") = qp$ est la probabilité de faire Face, puis Pile lors des deux premiers lancers de P_2 dans la répétition E_1.

De même, $\mathbb{P}(``R_2 = 1") = \frac{1}{2} qp$.

Finalement, la probabilité que $MX = X$ ait une infinité de solutions est : $\left(1 - \frac{1}{2} qp\right)^2$

8

Exercice 2.

1a) $x \mapsto -x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par produit, $x \mapsto -x\ln(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
L'exponentielle étant défini et continue sur $\mathbb{R}$, par composition,

$f : x \mapsto \frac{1}{x^x} = e^{-x\ln(x)}$ est défini et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Par croissance comparée :

$$x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0, \text{ donc par composition :}$$

$$e^{-x\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} e^{-0} = 1.$$

f n'étant défini que sur un voisinage à droite de 0,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0, de prolongement

$$\tilde{f} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

(On retrouve la convention habituelle $0^0 = 1$).

c) On sait que l'exponentielle est dérivable en 0, de dérivée en 0 : $e^0 = 1$.

Par définition : $\lim_{h \to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = 1$. Donc $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

d) On sait, par croissance comparée, que :

$$x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

donc $-x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Par composition avec la limite $\frac{e^h-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$, on a donc :

$$\frac{e^{-x\ln(x)}-1}{-x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

Par produit : $\underline{\frac{e^{-x\ln(x)}-1}{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1}$.

e) Soit $x>0$. Alors :

$$\frac{f(0+x)-f(0)}{x} = \frac{e^{-x\ln(x)}-1}{x} = \frac{e^{-x\ln(x)}-1}{x\ln(x)} \times \ln(x).$$

Or, $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et par la question précédente,

$$\frac{e^{-x\ln(x)}-1}{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 .$$

Par produit : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(0+x)-f(0)}{x} = +\infty$.

f n'étant pas définie sur un voisinage à gauche de 0 :

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{f(0+x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(0+x)-f(0)}{x} = +\infty.}$$

f admet donc une tangente verticale en 0.

(9)

2. f est continue sur le segment $[0,1]$ donc $\int_0^1 f(x)dx$ est un réel bien défini comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n=1$, alors $\frac{1}{n^n} = 1$ et $\frac{1}{n^2} = 1$, donc $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$.

Sinon, $n \geq 2$ donc :

$$\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n^{n-2}} \quad \text{et} \quad n-2 \geq 0.$$

Enfin, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ donc $\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \leq 1^{n-2} = 1$.

Par produit $\left(\frac{1}{n^2} \geq 0\right)$:

$$\frac{1}{n^n} \leq 1 \times \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, l'inégalité étudiée est vraie dans tous les cas :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

On a même : $\forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$, et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} \text{ converge}$$

4a)

$u_{p,q}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit des fonctions $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto (\ln(x))^q$, définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Supposons $q > 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_{p,q}(x) = x^p \ln(x)^q$.

ln n'étant pas définie en 0, $u_{p,q}$ n'est pas définie en 0.

Mais $p > 0$, $q > 0$ donc par croissance comparée :

$$u_{p,q}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad .$$

Ainsi, si $q > 0$, alors $u_{p,q}$ est prolongeable par continuité en 0, en posant $u_{p,q}(0) = 0$.

Si $q = 0$, alors $u_{p,q}(x) = x^p$ pour tout réel x, donc $u_{p,q}$ est définie en 0.

5. $\forall x \in]0,1]$, $u_{1,1}(x) = x\ln(x)$.

$u_{1,1}$ est donc dérivable sur $]0,1]$ comme produit des fonctions dérivables $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$, et :

$$\forall x \in]0,1], \quad u_{1,1}'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 .$$

Donc : $\forall x \in]0,1]$, $u_{1,1}'(x) > 0 \iff \ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$.

La même chaîne d'équivalence avec des égalités donne le signe de $u_{1,1}'$ sur $]0,1]$:

10 On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$u_{1,1}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$u_{1,1}$	‖ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

6. D'après la question précédente, et l'égalité $u_{1,1}(0)=0$:
$\forall x \in [0,1], \quad -\frac{1}{e} \leq u_{1,1}(x) \leq 0.$

Donc $|u_{1,1}(x)| = -u_{1,1}(x)$ et $0 \leq -u_{1,1}(x) \leq \frac{1}{e}$ pour tout $x \in [0,1]$. On a ainsi :

$\forall x \in [0,1], \quad |u_{1,1}(x)| \leq \frac{1}{e}$.

7. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$.
D'après la question 4b) (et 4a), $u_{p,q}$ est continue sur $[0,1]$.
Donc $I_{p,q}$ est bien défini, comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{p,0} : x \mapsto x^p$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$. Ainsi, $I_{p,0}$ est bien défini, et :

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

8 a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Soit $t \in]0,1]$.

Posons $u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v(x) = \ln(x)^{q+1}$ pour tout $x \in [t,1]$.

Alors, les fonctions u et v ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t,1]$ car : (i) $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[t,1]$,

(ii) Par composition, $x \mapsto \ln(x)^{q+1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[t,1]$,

(iii) u est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $[t,1]$.

Par intégration par partie :

$$\int_t^1 x^p \ln(x)^{q+1} dx = \int_t^1 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_t^1 - \int_t^1 u(x)v'(x)dx$$

$$= \frac{1^{p+1}\ln(1)^{q+1}}{p+1} - \frac{t^{p+1}\ln(t)^{q+1}}{p+1} - \int_t^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\times(q+1)\ln(x)^q \times \frac{1}{x} dx.$$

$$= -\frac{t^{p+1}\ln(t)^{q+1}}{p+1} - \frac{q+1}{p+1}\int_t^1 x^p \ln(x)^q dx.$$

On a donc bien :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall t \in]0,1], \int_t^1 x^p \ln(x)^{q+1} dx = -\frac{t^{p+1}\ln(t)^{q+1}}{p+1} - \frac{q+1}{p+1}\int_t^1 x^p \ln(x)^q dx.$$

---

b. Soit $t \in [0,1]$. Alors, $H_{p,q}(t) = -\int_1^t u_{p,q}(x)dx$.

Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse : $t \mapsto \int_1^t u_{p,q}(x)dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, de dérivée $t \mapsto u_{p,q}(t)$.

Multipliant par la fonction constante $t \mapsto -1$, on a donc :

(11) $\underline{H_{p,q}}$ est de classe $\mathcal{E}^1$ sur $[0,1]$, et :

$$\underline{\forall t \in [0,1],\ H_{p,q}'(t) = -u_{p,q}(t)}.$$

Enfin, $\underline{H_{p,q} \text{ est}}$ $\mathcal{E}^1$ donc $\underline{\text{continue sur } [0,1]}$.

c. Soit $q \in \mathbb{N}$, soit $p \in \mathbb{N}^*$.

D'après 8a) :

$$\forall t \in]0,1],\ H_{p,q+1}(t) = -\frac{t^{p+1}\ln(t)^{q+1}}{p+1} - \frac{q+1}{p+1} H_{p,q}(t).$$

Mais $\lim\limits_{t \to 0^+} H_{p,q+1}(t) = H_{p,q+1}(0) = I_{p,q+1}$ par continuité de $H_{p,q+1}$ en 0, (8b.)

et :

$\lim\limits_{t \to 0^+} t^{p+1}\ln(t)^{q+1} = 0$ par croissance comparée ($p+1>0$ et $q+1>0$)

$\lim\limits_{t \to 0^+} H_{p,q}(t) = H_{p,q}(0) = I_{p,q}$ par continuité de $H_{p,q}$ en 0 (8b.)

donc $\lim\limits_{t \to 0^+} -\frac{t^{p+1}\ln(t)^{q+1}}{p+1} - \frac{q+1}{p+1} H_{p,q}(t) = -\frac{q+1}{p+1} I_{p,q}$.

Par unicité de la limite, et $]0,1]$ étant un voisinage de 0^+ :

$$\underline{I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1} I_{p,q}},$$

pour tous $q \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

d. def I(p,q) :

```
I = 1/(p+1)  # contient I(p,0)
for k in range(q) :
    I = -(k+1)/(p+1) * I  # passage de I(p,k) à I(p,k+1)
return(I).
```

e. Montrons par récurrence : "$\forall q \in \mathbb{N}, \mathcal{H}(q)$" où

$\mathcal{H}(q)$: " $\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$ " pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$: $I_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$ par 7b.,

et $(-1)^0 \dfrac{0!}{(p+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{p+1}$

donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{p,0} = (-1)^0 \dfrac{0!}{(p+1)^{0+1}}$

Ceci démontre $\mathcal{H}(0)$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(q)$ et montrons $\mathcal{H}(q+1)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Par $\mathcal{H}(q)$: $I_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Par 8c : $I_{p,q+1} = -\dfrac{q+1}{p+1} I_{p,q}$

donc :

$$I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1} \times (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}} = (-1)^{q+1} \frac{(q+1)!}{(p+1)^{(q+1)+1}}.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a bien montré $\mathcal{H}(q+1)$, d'où l'hérédité.

(12). On a donc bien montré par récurrence :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la question précédente appliquée en $p = q = n$ $(p \neq 0)$:

$$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Pour $n=0$, $I_{0,0} = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1 = (-1)^0 \frac{0!}{(0+1)^{0+1}}$ donc l'égalité est toujours vraie si $n=0$.

g. Cf cours. (Prop 30 chap. 15).

10. a.

Soit $x \in [0,1]$.

Supposons $x > 0$.

Alors, $u_{n,n}(x) = x^n \ln^n(x) = (u_{1,1}(x))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} \right| = \frac{|u_{1,1}(x)|^n}{n!}$$

Or, $\sum_{n \geq 0} \frac{|u_{1,1}(x)|^n}{n!}$ converge comme série exponentielle de paramètre $u_{1,1}(x)$, donc :

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} \right| \text{ converge.}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge absolument, donc converge.

Enfin, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-u_{1,1}(x))^n}{n!}$

$= e^{-u_{1,1}(x)}$ (série exponentielle)

$= e^{-x\ln(x)} = f(x)$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} = f(x)$, pour tout $x>0$.

b. Si $x=0$, alors $f(x)=1$ et :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq 0 \\ 1 & \text{si } n=0 \end{cases}$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u_{k,k}(x)}{k!} = 1+0+\dots+0 = 1$.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge et a pour somme $1=f(x)$, si $x=0$.

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge absolument,

donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}\right|$ converge,

donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant N} \left|\frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}\right|$ converge pour tout $N\in\mathbb{N}$ (la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes).

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant N} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge, absolument pour tout $N\in\mathbb{N}$.

(13) Soit $N \in \mathbb{N}$.

D'après la relation de Chasles pour les séries (la convergence étant prouvée en 10 a et b) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} + R_N(x) .$$

Donc, avec le résultat de 8 a et b :

$$\underline{R_N(x) \overset{(1)}{=} f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} u_{n,n}(x)} .$$ Rq : Somme finie.

Or, f et les fonctions $u_{n,n}$ $(0 \leq n \leq N-1)$ sont continues sur $[0,1]$ d'après les questions précédentes.
L'égalité (1) étant valable pour tout $x \in [0,1]$,
R_N est combinaison linéaire des fonctions $f, u_{0,0}, u_{1,1}, \dots, u_{N-1,N-1}$, toutes continues sur $[0,1]$.
Donc R_N est continue sur $[0,1]$ comme combinaison linéaire de telles fonctions.

11. a) $\sum_{n \geq 0} \frac{(1/e)^n}{n!}$ converge comme série exponentielle de paramètre $\frac{1}{e}$, donc $\underline{\sum_{n \geq N} \frac{(1/e)^n}{n!} \text{ converge}}$, la convergence d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes.

Soit $x \in [0,1]$.

b) D'après 10c, $\sum_{n \geq N} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!}$ converge absolument.

D'après l'inégalité triangulaire, |

$$|R_N(x)| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} \right| = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|u_{1,1}(x)|^n}{n!}.$$

Or, d'après 6 : $|u_{1,1}(x)| \leq \frac{1}{e}$ $(x \in [0,1])$

donc : $\forall n \geq N, \ \frac{|u_{1,1}(x)|^n}{n!} \leq \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}$.

Par sommation des inégalités ($\sum_{n \geq N} \frac{(1/e)^n}{n!}$ converge, par 11a) :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|u_{1,1}(x)|^n}{n!} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}.$$

Par transitivité, on a donc bien, pour tout $x \in [0,1]$:

$$|R_N(x)| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}$$

---

c) D'après la question précédente :

$$\forall x \in [0,1], \quad |R_N(x)| \leq C_N := \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}.$$

Par intégration des inégalités $(0 \leq 1)$:

$$\int_0^1 |R_N(x)| dx \leq \int_0^1 C_N dx = C_N \int_0^1 dx = C_N [x]_0^1 = C_N.$$

Donc $\int_0^1 |R_N(x)| dx \leq C_N$.

D'après l'inégalité triangulaire $(0 \leq 1)$:

$$0 \leq \left| \int_0^1 R_N(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R_N(x)| dx.$$

Par transitivité : $\underline{0 \leq \left| \int_0^1 R_N(x) dx \right| \leq C_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}}$

14.

12 a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} = e^{1/e}$ (série exponentielle de paramètre $\frac{1}{e}$)

donc par la relation de Chasles,

$\forall N \geq 1, \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} = e^{1/e}$.

On a donc : $\underline{\forall N \geq 1, \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} = e^{1/e} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}}$.

b) Reconnaissant une série exponentielle :

$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{1/e}$,

donc $e^{1/e} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1/e)^n}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

D'après la question précédente :

$\underline{\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}$.

c) D'après 11c) : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq \left| \int_0^1 R_N(x)dx \right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!}$.

D'après la question précédente, $\lim_{N \to +\infty} 0 = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{e})^n}{n!} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes :

$\left| \int_0^1 R_N(x)dx \right| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Donc $\underline{\int_0^1 R_N(x)dx \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}$.

13. Soit $N \geq 1$ un entier naturel.

On a vu que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} + R_N(x)$$

donc : (linéarité)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n u_{n,n}(x)}{n!} \right) dx + \int_0^1 R_N(x)\,dx$$

$$\underset{\text{(linéarité)}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 u_{n,n}(x)\,dx}_{I_{n,n}} + \int_0^1 R_N(x)\,dx.$$

On a donc bien :

$$\forall N \geq 1, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} + \int_0^1 R_N(x)\,dx.$$

14. On a donc, d'après 13 :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} = \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx - \int_0^1 R_N(x)\,dx.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 R_N(x)\,dx \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ par 12 c), donc :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!}$ converge et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx$.

Or, $\forall n \geq 0$, $\displaystyle\frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (par 8 f)

Donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx$.

15. Simple conséquence du <u>changement de variable</u> <u>$k=n+1$</u> dans l'égalité obtenue en 14 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx .$$

16.

```
import numpy as np
def MajorantR(N):
    M= np.exp(1/np.e)
    for n in range(N):
        M= M-((1/np.e)**n)/fact(n)
    return(M)
```

où l'on a écrit, <u>avant ce code</u> :

```
def fact(n):    # fonction factorielle
    p=1
    for i in range(1,n+1):
        p=p*i
    return(p)
```

17. Soit $N \geq 2$. Alors :

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n} \right| = \left| \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} \right| \overset{(13)}{=} \left| \int_0^1 R_N(x)\,dx \right|$$

$$\leq M_N \text{, par 11c)}.$$

D'où :

$$\forall N \geqslant 2, \quad \left| \int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n} \right| \leqslant M_N .$$

18. Dès que $M_N \leqslant 10^{-6}$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n}$ fournit une approximation de $\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx$ à 10^{-6} près, par la question précédente, d'où le code :

```
S = 1
N = 1
while MajorantR(N) > 10**(-6):
    N = N+1
    S = S+(1/N)**N
print(S).
```