Programme de colle n^o 25 : Espaces probabilisés, convexité (mini chapitre).

*Semaine du lundi **6 mai**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Probabilités

25.1 Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formules de Bayes. Événements indépendants, lien avec les probabilités conditionnelles.

25.2 Système complet d'événements, formule des probabilités totales. Notion (HP, en remarque) de système quasi-complet d'événement. Méthodes pour contourner cet oubli du programme.

Convexité

25.3 Position relative de deux courbes (rappel). Notion de fonction convexe, concave sur un intervalle. Interprétation de la définition : inégalité "des cordes". Une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

25.4 Cas des fonctions dérivables : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors, f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I ssi la courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes sur I (inégalité des tangentes).

Proposition analogue pour la concavité. Inégalités de convexité classiques (exponentielle et logarithme).

25.5 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (conformément au programme): une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est convexe sur I ssi f'' est positive sur I (et idem pour la concavité).

25.6 Notion de point d'inflexion. Étude de convexité et application au tracé de la courbe d'une fonction.

25.7 Convexité et optimisation : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Si f est convexe sur I et si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a sur I. Proposition analogue pour la concavité.

Quelques questions de cours

1. Les questions de cours de la semaine dernière sont bien sûr au programme de cette semaine, surtout celles comportant des méthodes.
2. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notion de probabilité conditionnelle.
3. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées.
4. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales (avec et sans conditionnement).
5. On lance indéfiniment un dé à 6 faces équilibré. Déterminer la probabilité de l'événement : la première fois qu'un 1 tombe, il est suivi d'un autre 1.
6. Définir la notion de fonction convexe, concave sur un intervalle. Montrer que pour tous réels x, y supérieurs à 1 :
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$
7. Montrer que si une fonction f est convexe sur I, alors $-f$ est concave sur I. Montrer :
$$\forall x \in [1, e], \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}.$$
8. Énoncer les caractérisations de la convexité et de la concavité pour les fonctions dérivables. Démontrer l'implication vue en cours (si f' est croissante, alors l'inégalité des tangentes est vérifiée).
9. Énoncer et démontrer les (deux) propositions relatives aux extrema des fonctions convexes ou concaves.