Chapitre 21 : Variables aléatoires discrètes

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Variable aléatoire réelle

1. Introduction

Ce chapitre introduit la notion de variable aléatoire réelle, au cœur de la théorie des probabilités.

Considérons par exemple une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce. Un univers convenable pour modéliser cette expérience aléatoire est $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (1 pour pile, 0 pour face), que l'on peut munir d'une structure d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience. En fait, dans ce genre de contexte, on s'intéresse généralement à un caractère observable du résultat : le rang du premier pile, le nombre de piles lors des n premiers lancers, les successions de piles ou de faces, etc.

Comme en statistiques, ce caractère observable est modélisé par une application.

Par exemple, si on s'intéresse au rang du premier pile, on considérera l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par : pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est l'entier donnant le rang du premier pile du résultat ω (et 0 par exemple si ω est le résultat ne comportant que des faces). On rappelle qu'ici, $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans $\{0,1\}$, et alors :

$$X(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*, \omega_n = 1\} \text{ si } \omega \neq (0)_{n\in\mathbb{N}^*} \\ 0 \text{ si } \omega = (0)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{cases}.$$

Un autre exemple pour le même univers : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X_n(\omega)$ le résultat du n-ième lancer de ω. On définit alors des variables aléatoires X_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, représentant le résultat de chaque lancer.

La notion de variable aléatoire est centrale en probabilités, car elle permet d'exprimer naturellement beaucoup de choses : des événements, des probabilités, des systèmes complets d'événements, des problèmes d'indépendance, etc.

Convention

Afin d'éviter une redondance dans les énoncés, dans toute la suite de ce chapitre et sauf mention explicite du contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé quelconque.

2. Définition

Définition 1. On appelle *variable aléatoire réelle* sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ toute application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

Remarque. Autrement dit, une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ est un événement pour tout réel x. Cet événement sera noté $[X \leq x]$ et est réalisé si et seulement si le caractère modélisé par X est inférieur au réel x.

Exemple 2. On lance indéfiniment une pièce à Pile ou Face. Soit X_n la variable aléatoire donnant le rang du premier Pile obtenu, et 0 si l'on ne fit pas de Pile. (on admet que c'est une variable aléatoire).

Alors, $[X \leq 10]$ est l'événement :

Remarque. Démontrer qu'une application donnée est une variable aléatoire réelle ne fait pas partie des attendus du programme. Par contre, vous devez connaitre cette définition pour vous en servir :

(i) Vous devez savoir ce que signifie "Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω", et savoir utiliser par la suite l'hypothèse sur les événements ci-dessus,

(ii) Vous devez savoir introduire, de votre propre initiative, des variables aléatoires (dans des situations classiques) pour vous en servir.

Définition 3. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle *support* de la variable aléatoire X l'ensemble
$$X(\Omega) = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}.$$

Remarque. Le support $X(\Omega)$ d'une variable aléatoire réelle X est l'ensemble des valeurs prises par X : c'est donc une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple 4. *(i)* On lance (une fois) un dé à 6 faces classique. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé (fini) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui donne le résultat du dé est une variable aléatoire réelle. Si on prends $\Omega = [\![1, 6]\!]$, cette variable aléatoire est simplement:
$$X : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \omega \end{array} \right. .$$

Son support est $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

Si on joue à un jeux auquel on gagne si et seulement si on fait 6, on peut aussi considérer la variable aléatoire réelle :
$$Y : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \omega = 6 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

qui sera plus pertinente. Son support est $\{0, 1\}$.

(ii) On effectue une suite infinie de lancers (indépendants) d'une pièce à pile ou face. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire, et on peut alors considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n valant 1 si le n-ième lancer donne pile, et 0 sinon. On admet ici implicitement que l'application qui, à une suite de lancers ω, associe le résultat de son n-ième lancer, est une variable aléatoire (réelle). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le support de X_n est $\{0, 1\}$.

(iii) Dans l'expérience précédente, on s'intéresse au nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers. On note P_n la variable aléatoire donnant le nombre de piles lors des n premiers lancers. On pourra alors écrire :
$$P_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Cette somme est faite dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\Omega$ des applications de Ω vers $\mathbb{R}$. Cela signifie simplement :
$$P_n : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega) \end{array} \right. .$$

Le support de P_n est $P_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (en n lancers, on peut obtenir de 0 à n fois pile).

(iv) On effectue une suite infinie de lancers (indépendants) d'un dé à 6 faces. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire, et on peut alors considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n donnant le résultat du n-ième lancer de dé. Le support des variables aléatoires X_n est toujours $[\![1, 6]\!]$.

(v) Dans l'expérience précédente, si on s'intéresse à la parité de nos dés, on peut aussi considérer les variables aléatoires Y_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, donnant la parité du n-ième lancer. On défini alors $Y_n(\omega)$ par 1 si le n-ième lancer de ω a un résultat impair, et 0 sinon. Y_n a pour support $\{0, 1\}$.

(*vi*) Dans l'expérience précédente, on s'intéresse à la somme des résultats des trois premiers lancers. On considère alors la variable aléatoire S_3 donnant cette somme. On pourra écrire que $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$, et le support de S_3 est $[\![3, 18]\!]$.

(*vii*) On attend un bus qui passe toutes les dix minutes. On admet l'existence d'un espace probabilisé modélisant cette expérience, et on note X la variable aléatoire réelle donnant notre temps d'attente à la station. Son support est $[0, 10]$.

Convention

Dans toute la suite de ce cours, nous utiliserons l'expression "variable aléatoire" pour désigner la notion de "variable aléatoire réelle". Cela signifie sur nos variables aléatoires sont toutes à valeurs réelles.

3. Événements associés aux variables aléatoires

Introduire une variable aléatoire définit d'emblée quelques événements, ce qui est très pratique. Les notations d'usage ci-dessous ont une forme d'impertinence vis à vis de la rigueur des mathématiques, et il faut donc bien comprendre cette définition pour ne pas se perdre dans les notations.

Définition 5. et proposition
Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors :

(*i*) Pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ est un événement, noté $[X \leq x]$.

(*ii*) Pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}$ est un événement, noté $[X < x]$.

(*iii*) Pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ est un événement, noté $[X = x]$.

(*iv*) Pour tous réels x et y, l'ensemble $\{\omega \in \Omega, y \leq X(\omega) \leq x\}$ est un événement, noté $[y \leq X \leq x]$.

(*v*) Pour tout intervalle I, ou pour tout ensemble fini I, l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$ est un événement, noté $[X \in I]$.

On définit de même des événements notés $[X \geq x]$, $[X > x]$, $[y < X \leq x]$, etc.

Démonstration. (*ii*), (*iii*) à noter. Reste admis. □

Exemple 6. On considère une suite infinie de lancers d'un dé à 6 faces. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire donnant le résultat du n-ième lancer. Décrivons en français les événements :

(*i*) $[X_2 \geq 5]$:

(*ii*) $[X_1 \in \{2, 4, 6\}]$:

(*iii*) (pour $n \in \mathbb{N}^*$) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [X_k > 5]$:

(*iv*) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [3 < X_k < 5]$:

(*v*) $[X_1 > 6]$:

Exemple 7. On lance simultanément deux dés à 6 faces, expérience que l'on modélise par un espace probabilisé fini d'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On note Y la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus. Explicitons (en extension) les événements :

(*i*) $[Y = 5] =$

(*ii*) $[9 < Y \leq 11] =$

Exemple 8. On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce à pile ou face. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire. On note, pour tout entier n, X_n la variable aléatoire valant 1 si le résultat du n-ième lancer est pile, et 0 sinon. Décrire à l'aide de ces variables aléatoires les événements suivants :

(i) On obtient face lors du premier, 3e ou 5e lancer :

(ii) Les n premiers lancers tombent sur face :

(iii) Si le n-ième lancer est pile, alors il est immédiatement suivi d'un face :

(iv) Tout les résultats pile sont immédiatement suivi d'un face :

Remarque. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé. Alors pour tout réel x, $[X \leq x]$ et $[X > x]$ sont des événements contraires.

II. Variables aléatoires réelles discrètes

Les variables aléatoires discrètes sont très pratiques et interviennent naturellement dans les expériences aléatoires "à étapes finies". On étudiera aussi les variables aléatoires à densité. Avec ces deux cas, on a couvert la plupart des variables aléatoires qui interviennent spontanément dans des problèmes concrets.

1. Notion de variable aléatoire discrète

Remarque. Rappel : Un ensemble E est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable, autrement dit s'il est fini ou si on peut énumérer ses éléments (de manière exhaustive, sans répétition) par l'ensemble des entiers. Autrement dit, E est au plus dénombrable si on peut décrire E sous l'une des forme suivante :

- $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ pour un certain entier n, ou
- $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$

où dans tous les cas l'énumération est faite **sans répétition** :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j.$$

Définition 9. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X est une *variable aléatoire discrète* si son support $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
Dans ce cas, si $X(\Omega)$ est fini, on dit alors que X est une variable aléatoire finie. Sinon, on dit que c'est une variable aléatoire discrète infinie.

Remarque. Dans la majorité des cas, nos variables aléatoires discrètes seront à support inclus dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable étant au plus dénombrable (admis), cette condition permet immédiatement de vérifier la définition ci-dessus. Autrement dit :

Proposition 10. *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Alors, X est une variable aléatoire discrète.*

Remarque. (et méthode) Pour déterminer si une variable aléatoire est discrète et dire, le cas échéant, si elle est finie ou infinie, on devra donc déterminer son support $X(\Omega)$. Dans la majorité des cas, la proposition ci-dessus permettra de conclure. **Cette démarche est très courante en début d'exercice**, voir obligatoire.

Exemple 11. Tous les exemples vus plus haut sont des variables aléatoires discrètes, sauf celle donnant le temps d'attente du bus (exemple 4 (vii)). Le rang du premier pile d'une suite de pile ou face, le résultat d'un dé, la somme de trois dés, sont à valeurs entières donc sont des variables aléatoires discrètes.

Exemple 12. On lance une pièce à pile ou face jusqu'au premier pile. Si le premier pile tombe au n-ième lancer, on gagne $\frac{1}{n}$ euros, et on ne gagne rien si pile ne tombe jamais. Soit X la variable aléatoire (admis) donnant notre gain. Alors,

$$X(\Omega) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

X est une variable aléatoire discrète : $X(\Omega)$ est dénombrable car l'application ci-dessous est bijective.

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & X(\Omega) \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

2. Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète

On utilisera très souvent ce SCE naturellement associé à une variable aléatoire discrète.

Proposition 13. *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors, la famille d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.*

Démonstration. A noter. □

Remarque. Autrement dit :

(*i*) (cas fini) si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ sans répétition entre les x_i, alors $([X = x_i])_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

(*ii*) (cas infini) si $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ sans répétition entre les x_i, alors $([X = x_i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Proposition 14. (Corollaire) *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

(i) Si X est finie, notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ sans répétition. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_k]) = 1.$$

(ii) Si X est infinie, notons $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ sans répétition. Alors,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = x_k]) = 1.$$

Exemple 15. On considère une suite infinie de lancers d'une pièce à pile ou face. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier pile, et valant 0 si aucun pile ne tombe. Alors, $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un SCE. C'est une manière plus rapide de dire la chose suivante :

"Notons A_n l'événement "le premier pile tombe au n ième lancer" et A_0 l'événement "ne pas faire de pile". Alors, la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un SCE."

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète, fonction de répartition

Définition 16. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle *loi de probabilité* de X l'application :

$$P_X : \left| \begin{array}{lcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X = x]) \end{array} \right. .$$

Remarque. On parle de *la loi* d'une variable aléatoire pour parler de sa loi de probabilité.

Remarque. (et méthode) Déterminer la loi d'une variable aléatoire, c'est donc donner les probabilités des événements $[X = x]$, pour $x \in X(\Omega)$. On donnera pour cela l'ensemble $X(\Omega)$, puis ces probabilités.

Exemple 17. Fondamental Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire donnant le rang du premier pile d'une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (et valant 0 si aucun Pile ne tombe).

Remarque. La somme des probabilités obtenues doit donc faire 1, en vertu de la proposition 3.

La loi de probabilité est autrement caractérisée par un autre objet.

Définition 18. Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle *fonction de répartition* de X la fonction :

$$F_X : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X \leq x]) \end{array} \right. .$$

Exemple 19. On lance un dé équilibré à 6 faces. Soit X la variable aléatoire donnant le résultat de ce dé. Traçons le graphe de sa fonction de répartition

Voici les propriétés classiques d'une fonction de répartition.

Proposition 20. *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et F_X la fonction de répartition de X. Alors :*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$.

(ii) F_X est croissante.

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

(iv) F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

(v) F_X admet une limite finie à gauche en tout point, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t \to x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x]).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Dans la démonstration, on a utilisé le fait notable suivant : si X est une variable aléatoire discrète et x un réel, alors :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leq x + \frac{1}{n}] = [X \leq x]$$

(et cette intersection est décroissante), et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leq x - \frac{1}{n}] = [X < x]$$

(et cette réunion est croissante).

Remarque. En conséquence de cette proposition, pour toute variable aléatoire discrète X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) - \mathbb{P}([X < x]) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t).$$

Vous verrez assez vite que quand on étudie une variable aléatoire, c'est surtout sa loi de probabilité qui nous intéresse pour tirer des conclusions concrètes. Alors, dans certains cas, étudier sa fonction de répartition peut être plus simple, et on ne perd rien :

Proposition 21. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Il est équivalent de dire :*

(i) X et Y ont la même loi de probabilité : $P_X = P_Y$.

(ii) X et Y ont la même fonction de répartition : $F_X = F_Y$.

Démonstration. $(ii) \implies (i)$ est une conséquence directe de la remarque ci-dessus. $(i) \implies (ii)$ est admis. □

4. Variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 22. (*i*) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

(*ii*) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si :
pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, les événements $[X_1 = x_1], [X_2 = x_2], \ldots, [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.

Remarque. Si X et Y sont indépendantes, alors les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants pour tous réels x et y, même si on n'a pas $x \in X(\Omega)$ et de $y \in Y(\Omega)$. En effet, un événement négligeable est indépendant de tout événement (voir TD 19).

Exemple 23. On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'un dé à 6 faces. Soit X_i la variable aléatoire discrète donnant le résultat du i-ième dé, pour tout entier i. Alors, pour tout entier n, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Proposition 24. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé. Supposons X et Y indépendantes. Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$ qui sont finies ou des intervalles. Alors, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants.*

Démonstration. Pour les parties finies : à noter. Pour les intervalles : admis. □

5. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

Proposition 25. *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit g une fonction réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subset I$. Alors,*

$$g \circ X : \left| \begin{array}{lcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, notée plus simplement $g(X)$.

Démonstration. Admis. □

Remarque. Attention à la notation trompeuse : $g(X)$ est une notation pour une variable aléatoire qui n'a rien à voir avec le fait "d'évaluer g (fonction réelle) en X". X n'est pas un réel, donc aucune confusion n'est possible.

Exemple 26. On considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée dans le cadre d'un jeu. On démontre que l'événement "ne faire que des faces" est négligeable, et on le néglige. Dans ce jeu, on paye 5 euros pour jouer, et on gagne $2n$ euros si le premier pile a lieu lors du n-ième lancer.

Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier Pile obtenu, et Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. Exprimons Y en fonction de X.

Exemple 27. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour $g(x) = 2x + 1$, on notera $g(X) = 2X + 1$. De même, e^X est la variable aléatoire donnée par $e^X(\omega) = e^{X(\omega)}$.

Exemple 28. (et méthode) On considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On démontre que l'événement "ne faire que des faces" est négligeable, et on le néglige. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier pile. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y donnée par $Y = 2X + 1$.

Proposition 29. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors,*

$$X+Y : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega)+Y(\omega) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. De même, $XY : \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Démonstration. Admise (très accessible). □

Exemple 30. (et méthode) On joue au jeux suivant au casino : on lance successivement deux dés équilibrés à 6 faces, et notant x_1 (resp. x_2) le résultat du premier (second) dé, on a un gain algébrique de $x_1 - x_2$ euros (c'est-à-dire que si $x_1 - x_2$ est négatif, on perd $x_2 - x_1$ euros). Cette expérience aléatoire se modélise par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, et, le dé étant équilibré, $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Notons X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant respectivement le résultat du premier et du second dé. Alors :

(*i*) $\forall i \in \{1, 2\}, X_i(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Les X_i sont donc des variables aléatoires discrète finies.

(*ii*) Posons $Y = X_1 - X_2$. Alors, $Y(\Omega) = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$ donc Y est une variable aléatoire discrète finie. De plus, Y est la variable aléatoire donnant notre gain algébrique.

(*iii*) Déterminons la loi de Y. (à noter).

III. Moments d'une variable aléatoire discrète

On introduit ici des réels permettant de décrire le comportement de certaines variable aléatoire, appelés moments. Le premier moment d'une variable aléatoire X est déjà connu : il s'appelle l'espérance, et représente la valeur moyenne prise par X. Le second moment est lié à la variance de X, et les moments dits "d'ordre supérieurs" sont une généralisation des précédents, qui interviennent plus tard dans la théorie.

Pour commencer, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est une série statistique brute, de modalités $(v_1, \ldots, v_p)$, on définit naturellement sa moyenne par

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sum_{k=1}^{p} v_k f_k$$

où f_k est la fréquence de la modalité v_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

La notion de probabilité d'un événement étant une fréquence théorique d'apparition de cet événement, on souhaite poser, dans le cas d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k])$$

pour définir l'espérance $E(X)$ de X. La définition que l'on gardera étend celle-ci, dans le cas où X n'est pas à valeurs entières. On remarquera qu'il est alors nécessaire d'introduire une condition : il faut que la série ci-dessus converge.

Ainsi, certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance. Pour le comprendre, rien de mieux qu'un exemple.

Exemple 31. On joue au jeu suivant : on lance une pièce équilibrée à pile ou face et on note k le rang d'apparition du premier pile. On gagne alors $k!$ carrés de chocolats. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de carrés de chocolats gagnés.

Comme on l'a déjà vu, la probabilité d'avoir son premier pile au rang $k \in \mathbb{N}^*$ est :

$$\mathbb{P}([X = k!]) = \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi, le gain moyen devrait être donné par la somme de la série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k!\mathbb{P}([X = k!]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{2^k}.$$

Or, cette série diverge grossièrement (montrer par récurrence : $\forall k \geq 4, k! > 2^k$). Donc cette variable aléatoire n'a pas d'espérance. En, fait, s'il y avait un "gain moyen" à attribuer à ce jeu, il serait infini.

1. Espérance d'une variable aléatoire discrète

a) Définition

Pour les VAD finies, tout se passe sans problème.

Définition 32. Soit X une variable aléatoire discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sans répétition. Alors, on appelle *espérance* de X le réel noté $E(X)$ et donné par :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}([X = x_k]).$$

Pour les VAD infinies, on rajoute une condition.

Définition 33. Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ sans répétition. On dit que X *admet une espérance* si la série $\sum_{n\geq 0} x_n \mathbb{P}([X = x_n])$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle *espérance de X* le réel noté $E(X)$ donné par :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}([X = x_k]).$$

Remarque. Pourquoi demander la convergence *absolue* ? C'est lié à une subtilité sur la convergence des séries. On ne veut pas que l'espérance de X dépende de l'ordre dans lequel on a énuméré les éléments de $X(\Omega)$. Or, on peut démontrer (conceptuel, très hors programme, mais vous pourriez comprendre la preuve) que si une série converge sans converger absolument, alors la valeur de sa somme dépend fortement de l'ordre dans lequel on a sommé ses termes. Plus précisément, pour tout réel x, on peut ordonner sa somme infinie d'une façon à ce qu'elle converge vers x...

Proposition 34. *La définition ci-dessus est bien posée : la convergence absolue de* $\sum_{n\geq 0} x_n \mathbb{P}([X = x_n])$ *ne dépend pas de la numérotation* $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ *choisie du support de* X*. De plus, sous l'hypothèse de convergence absolue, le réel* $E(X)$ *est bien défini et ne dépend pas non plus du choix de cette numérotation.*

Démonstration. Admis. □

Remarque. Si une VAD X est à support inclus dans $\mathbb{N}$, ce qui est un cas très courant, on a donc que X admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}([X = k])$ converge, et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k]).$$

Exemple 35. (*i*) On lance un dé équilibré à 6 faces. Si la face obtenue est paire, on perd la valeur de cette face (en euros). Sinon, on la gagne. Quel est le gain moyen de ce jeux?

(*ii*) On effectue une série infinie de lancers d'une pièce équilibrée à pile ou face. Quelle est le rang moyen d'apparition du premier pile?

b) Propriétés

Première propriété importante de l'espérance : sa linéarité.

Proposition 36. (linéarité de l'espérance) *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance. Alors :*

(i) Pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une espérance et :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(ii) Soit Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance. Alors, pour tous réels a et b, $aX + bY$ admet une espérance, et :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Démonstration. À noter, second point admis (démonstration méticuleuse avec des doubles séries, hors programme). □

Remarque. Une conséquence immédiate : soient $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définie sur un même espace probabilisé. Si toutes ces variables aléatoires discrètes admettent une espérance, alors il en est de même de $X_1 + \dots + X_n$, et :

$$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k).$$

Exemple 37. Important, simplification considérable d'un problème. On lance une pièce équilibrée à pile ou face n fois de suite. Quel est le nombre moyen de piles obtenus?

Autre propriété de l'espérance : sa positivité.

Proposition 38. *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance. Supposons X à valeurs positives, i.e $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Alors, $E(X) \geq 0$.*
De plus, une variable aléatoire positive d'espérance nulle est presque-sûrement nulle. Autrement dit :

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+ \\ E(X) = 0 \end{cases} \implies \mathbb{P}([X = 0]) = 1.$$

Démonstration. À noter. □

Une conséquence immédiate :

Proposition 39. *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance et I un intervalle. Supposons $X(\Omega) \subset I$. Alors, $E(X) \in I$.*

Autrement dit, si toutes les valeurs d'une variable aléatoire sont dans un intervalle, alors son espérance aussi.

Démonstration. À noter. □

Définition 40. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. On dit que X est une variable aléatoire *centrée* si $E(X) = 0$.

Définition 41. (et proposition) Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. On appelle *variable aléatoire centrée associée* à X la variable aléatoire discrète $X - E(X)$. C'est une variable aléatoire centrée.

Démonstration. Par linéarité de l'espérance ($E(X)$ étant un réel), $X - E(X)$ admet une espérance et

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0.$$

□

c) Le théorème de transfert

Enfin, le théorème de transfert ci-dessous permet de vérifier l'existence et de calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète obtenue par application d'une fonction.

Proposition 42. (théorème de transfert, cas fini) *Soit X une variable aléatoire discrète finie définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit g une fonction réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$. Alors, $g(X)$ est une variable aléatoire discrète finie, et*

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}([X = x_k])$$

où $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sans répétitions.

Démonstration. À noter. □

Proposition 43. (théorème de transfert, cas infini) *Soit X une variable aléatoire discrète infinie définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit g une fonction réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$. Notons $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ sans répétitions.*
Alors, $g(X)$ est une variable aléatoire discrète, et il est équivalent de dire :

(i) $g(X)$ admet une espérance, et

(ii) La série $\sum_{k \geq 0} g(x_k)\mathbb{P}([X = x_k])$ converge absolument.

Dans ce cas, on a de plus :

$$E(g(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(x_k)\mathbb{P}([X = x_k]).$$

Démonstration. Admis. □

2. Variance d'une variable aléatoire discrète

a) Définition

Encore une fois, on peut comparer cette définition à celle vue en statistiques. Commençons par le cas fini.

Définition 44. Soit X une variable aléatoire discrète finie. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sans répétitions. Alors, on appelle *variance de X* le réel noté $V(X)$ et donné par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Pour le cas infini, il faut rajouter les conditions permettant d'écrire une telle formule.

Définition 45. Soit X une variable aléatoire discrète infinie. On dit que X *admet une variance* si X admet une espérance, et si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. Dans ce cas, on appelle variance de X le réel noté $V(X)$ donné par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Remarque. Si une VAD admet une variance, alors elle admet une espérance par définition.

Intuitivement, la variance d'une variable aléatoire mesure son écart moyen à sa moyenne.

Proposition 46. *Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors :*

(i) $V(X) \geq 0$.

(ii) $V(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante, i.e ssi :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = a]) = 1.$$

Démonstration. À noter. □

En fait, c'est l'écart type qui à ce rôle de mesurer l'écart moyen avec la valeur moyenne. La variance est l'outil qui est resté car il est plus pratique en terme de calculs (voir ses propriétés plus bas).

Définition 47. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle écart-type de X le réel noté $\sigma(X)$ donné par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

b) Propriétés de la variance

Commençons par un petit lemme admis :

Proposition 48. *Soit X une variable aléatoire discrète. Si X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance.*

Démonstration. Admis. □

Cela motive la formule de Koenig-Huygens, très largement utilisée pour calculer des variances.

Proposition 49. *(***Formule de Koenig-Huygens***) Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) X admet une variance, et

(ii) X^2 admet une espérance.

Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Ainsi, une VAD X admet une variance si et seulement si X^2 admettent une espérance, et alors on peut calculer la variance de X à partir de $E(X)$ et de $E(X^2)$. Pour continuer la théorie, on dit qu'une variable aléatoire X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ si la variable aléatoire discrète X^r admet une espérance. En terme d'interprétation, les moments d'une VAD permettent de décrire la dispersion de celle-ci. En termes plus théoriques, on peut démontrer que les moments d'une variable aléatoire discrète caractérisent sa loi lorsqu'ils existent tous.

Définition 50. Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet un moment d'ordre 2 si X^2 admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre 2 de X le réel $E(X^2)$.

Remarque. (et méthode) En pratique, pour déterminer si une variable aléatoire discrète X admet une variance et (le cas échéant) la calculer, on utilise la formule de Koenig-Huygens combinée avec le **théorème de transfert**.

Par exemple, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour vérifier si X admet une variance...

(i) On vérifie si X admet un moment d'ordre 2. Par application de la formule de transfert, cela revient à vérifier si la série $\sum_{k \geq 0} k^2 \mathbb{P}([X = k])$ converge absolument.

(ii) Dans ce cas, on peut affirmer que X admet une variance, et la calculer avec la formule de Koenig-Huygens.

Si X n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors on procède aux mêmes considérations, mais en énumérant $X(\Omega)$ pour considérer les séries ci-dessus.

Proposition 51. *Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b, la variable aléatoire discrète $aX + b$ admet une variance, et*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. En particulier, si X admet une variance, alors pour tout réel b, $X+b$ admet une variance, et $V(X+b)=V(X)$.

Ce qui suit permet de normaliser une variable aléatoire discrète admettant une variance. C'est utile dans certains raisonnements.

Proposition 52. et définition *Soit X une variable aléatoire discrète.*

(*i*) *On dit que X est une variable aléatoire discrète* centrée réduite *si X admet une variance, et si* $\begin{cases} E(X)=0 \\ V(X)=1 \end{cases}$.

(*ii*) *Si X admet une variance non-nulle, alors on appelle* variable centrée réduite associée à X *la variable aléatoire discrète notée X^* et donnée par :*

$$X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}.$$

C'est une variable aléatoire discrète centrée réduite.

Démonstration. À noter □

Remarque. Si X est de variance nulle dans le point (ii) ci-dessus, c'est une variable aléatoire quasi-certaine (donc simple à étudier).

c) Étude d'un exemple : la loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$.

On considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce à pile ou face ayant la probabilité p de faire pile.

(i) Modéliser le problème à l'aide de variables aléatoires.

(ii) Démontrer que l'événement "ne faire que des faces" est négligeable. On néglige cet événement dans la suite.

(iii) Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier pile obtenu. Donner la loi de X.

(iv) Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

(v) X admet-elle une variance? Si oui, la calculer.

Remarque. Certains énoncés décideront, au lieu de "négliger" la suite infinie de faces, de déclarer que X prend la valeur 0 dans ce cas, ce qui ne change rien au résultat.

Remarque. On dira dans la suite que X suit une loi géométrique de paramètre p. On notera cette loi $\mathcal{G}(p)$. Pour signifier que X suit cette loi, on écrira :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

On a démontré que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

(i) X admet une espérance, et $E(X) =$

(ii) X admet une variance, et $E(X) =$

IV. Lois usuelles

Pour décrire une variable aléatoire, on décrit généralement sa loi, et ça résume une grande partie des informations voulues. Par exemple :

Proposition 53. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Supposons que X et Y suivent la même loi, c'est-à-dire que leurs supports sont égaux à un ensemble noté S, et :*

$$\forall s \in S, \mathbb{P}([X = s]) = \mathbb{P}([Y = s]).$$

Alors, X admet une espérance (resp. une variance) ssi Y admet une espérance (resp. une variance), et dans ce cas :

$$E(X) = E(Y) \text{ (resp. } E(X) = E(Y) \text{ et } V(X) = V(Y)).$$

Démonstration. En exercice. □

Il y a quelques lois classiques à connaitre pour les variables aléatoires discrètes.

1. Lois discrètes finies

a) Loi certaine

Une variable aléatoire de loi certaine prends une valeur fixée presque sûrement.

Définition 54. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que X *suit la loi certaine de paramètre a* si :

$$\mathbb{P}([X = a]) = 1.$$

Autrement dit, une loi certaine est une loi presque sûrement constante.

Exemple 55. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application constante $X : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto a$

suit la loi certaine de paramètre a.

Proposition 56. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$. Alors, X admet une espérance et une variance données par :*

$$E(X) = a \text{ et } V(X) = 0.$$

Démonstration. A noter. □

Remarque. Le paramètre d'une loi certaine est donc son espérance.

Proposition 57. *Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Si $V(X) = 0$, alors X suit la loi certaine de paramètre $E(X)$.*

Démonstration. C'est direct avec la proposition 46 : X suit une loi certaine de paramètre a, et $a = E(X)$ par la proposition précédente, donc X suit une loi certaine de paramètre $E(X)$. □

b) Loi uniforme

La loi uniforme sur un intervalle $[\![1, n]\!]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) est la loi obtenue pour le tirage d'un entier entre 1 et n en situation d'équiprobabilité.

Définition 58. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la *loi uniforme* sur $[\![1, n]\!]$, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$$

si :

- $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et
- $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple 59. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, et on tire une de ces boules de manière équiprobable. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée. Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une loi finie, donc admet une espérance et une variance.

Proposition 60. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration. À noter. □

On peut généraliser sur tout intervalle entier $\llbracket a, b \rrbracket$, qui comporte $b-a+1$ éléments :

Définition 61. Soient a et b deux entiers tels que $a \leq b$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que W suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$, et on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$$

si :
- $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$, et
- $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b-a+1}$.

La translatée d'une variable suivant une loi uniforme suit une loi uniforme :

Proposition 62. *Soient a et b deux entiers tels que $a \leq b$ et X une variable aléatoire telle que*

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket).$$

Alors, $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, b-a+1 \rrbracket)$.

Démonstration. À noter. □

Une variable suivant une loi uniforme est finie donc admet espérance et variance, données par la proposition ci-dessous :

Proposition 63. *Soient $a \leq b$ des entiers et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$. Alors,*

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Démonstration. À noter. □

c) Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli correspond au tirage d'une pièce à pile ou face, le paramètre donnant la probabilité de tomber sur la face numérotée 1.

Définition 64. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la *loi de Bernoulli de paramètre p*, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

si :
- $X(\Omega) = \{0, 1\}$, et
- $\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p$ et $\mathbb{P}([X = 1]) = p$.

Exemple 65. Un joueur lance un dé équilibré à 6 faces, et gagne dès que la face obtenue est inférieure ou égale à 2. Soit X la variable aléatoire valant 1 si le joueur gagne, et 0 sinon. Alors,

$$X \hookrightarrow$$

Remarque. La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ coïncide avec la loi ....

Encore une fois, une variable suivant une loi de Bernoulli est finie, donc admet espérance et variance.

Proposition 66. *Soient $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Alors :*

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$

Démonstration. À noter. □

d) Loi binomiale

Exercice 67. On lance indéfiniment à pile ou face une pièce ayant la probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur pile. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de pile obtenus pendant les n premiers lancers (définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience). On s'intéresse à la loi de X_n.

(*i*) $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ est clair.

(*ii*) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$: "$\forall k \in [\![0, n]\!], \mathbb{P}([X_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$".

(*iii*) Déterminer l'espérance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 68. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la *loi binomiale de paramètres n et p*, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

si :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et,
- $$\forall k \in [\![0, n]\!], \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ apparaît donc lors du décompte du nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes identiques ayant la probabilité p de réussir. Une telle répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes et identiques est appelé un schéma de Bernoulli.

Exemple 69. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire avec remise n boules à l'aveugle dans cette urne. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées. Alors :

$$X \hookrightarrow$$

Plus généralement :

Proposition 70. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$:*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

Alors, $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration. À noter. □

Une loi binomiale est encore une loi finie, donc admet espérance et variance.

Proposition 71. *Soient X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$.) Alors :*

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. On pourrait aussi utiliser l'exercice précédent pour l'espérance.

Exercice 72. Soient a et b des réels strictement positifs. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \dfrac{a}{a+b})$, alors $([X=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événement. En déduire une démonstration de la formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.

2. Lois discrètes infinies

a) La loi Géométrique

La loi géométrique est la loi du premier succès dans un schéma de Bernoulli. Il est conseillé de relire l'exemple traité en III.2c) ici.

Définition 73. Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit *la loi géométrique de paramètre* p, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et
- $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X=k]) = (1-p)^{k-1}p.$$

Exemple 74. D'après l'exemple traité en III.2.c), si X est la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier pile lors de lancers successifs d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de faire pile, alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

(à condition de négliger l'événement négligeable "ne faire que des faces", ce qui est correcte car $p \neq 0$).

Remarque. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p =$

Conclusion : la formule $\mathbb{P}([X=k]) = (1-p)^{k-1}p$ définit bien la loi d'une variable aléatoire à support dans $\mathbb{N}^*$, et $(\mathbb{P}([X=k])_k$ est une suite géométrique de raison $(1-p)$.

Proposition 75. *Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire telle que*

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

Alors, X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. À noter. □

Pour les variables géométriques, il peut être utile de penser à sa fonction de survie, particulièrement simple. On appelle fonction de survie d'une variable aléatoire réelle X la fonction réelle $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$. On remarquera $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X > x]) = 1 - F_X(x)$ (où F_X est la fonction de répartition de X).

Proposition 76. *Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :*

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k$.

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}, F_X(k) = 1 - (1-p)^k$.

(iii) On dit que X est sans mémoire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+l]) = \mathbb{P}([X > l]).$$

Remarque. Fonctions de survie et fonctions de répartitions sont généralement les bons outils pour traiter des problèmes avec des minimums ou des maximums de variables aléatoires.

Exercice 77. (À chercher). On lance indéfiniment deux pièces à pile ou face, ayant chacune une probabilité p de faire pile. On néglige l'événement "une des pièce ne fait que des faces", et on note X_1, resp. X_2, le rang d'apparition du premier pile pour la pièce 1, resp. 2. On note $Y = \min(X_1, X_2)$ la variable aléatoire donnant le plus petit de ces deux rangs.

(i) Reconnaitre les lois de X_1 et X_2.

(ii) Donner le support S de Y.

(iii) Montrer que $\forall s \in S, \mathbb{P}([Y > s]) = \mathbb{P}([X_1 > s] \cap [X_2 > s])$.

(iv) En déduire F_Y, puis la loi de Y.

b) La loi de Poisson

L'intérêt de cette loi sera justifié à posteriori.

Définition 78. Soit λ un réel *strictement positif* et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la *loi de Poisson de paramètre* λ, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda),$$

si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et
- $$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 79. Vérifier que cette formule définit bien une loi de probabilité.

Proposition 80. *Soit $\lambda > 0$ un réel et X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors, X admet une espérance et une variance, et :*

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

Démonstration. À noter. □

Pour comprendre comment la loi de Poisson intervient naturellement, on démontre d'abord le résultat suivant, appelé résultat de convergence de lois binomiales vers une loi de Poisson.

Il dit que la loin de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est la "loi limite" d'une suite (X_n) de variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, résultat qui sera précisé en seconde année.

Proposition 81. *Soit $\lambda > 0$ un réel.*
Considérons, pour tout entier n, une variable aléatoire X_n telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration. À noter. □

Origine de la loi de Poisson

La loi de Poisson apparait spontanément comme loi limite pour des phénomènes qu'on peut "discrétiser". Par exemple, on étudie le nombre de clients se présentant à un magasin, en 1 minute. On dispose de la statistique suivante : en moyenne 3 clients se présentent au magasin par minute.

(i) Une première modélisation serait de dire qu'on a une chance sur deux d'avoir un nouveau client toutes les 10 secondes. Il y a alors 6 tranches de 10 secondes par minute, et on est en présence d'un schéma de Bernoulli. Ce nombre de client est alors modélisé par une loi $\mathcal{B}(6, \frac{1}{2})$.

(ii) On peut raffiner un peu, et dire qu'en 5 secondes, on a une chance sur 4 d'avoir un nouveau client. Par le même raisonnement, on modélise alors le problème par une loi $\mathcal{B}(12, \frac{1}{4})$, car il y a 12 tranches de 5 secondes dans une minute.

(iii) En généralisant, si on découpe notre minute en n intervalles de temps, il faudra considérer qu'on a, sur chaque laps de temps, la probabilité $\frac{3}{n}$ d'avoir un nouveau client. On sera alors amené à modéliser le problème par :
$$\mathcal{B}(n, \frac{3}{n}).$$

(iv) La loi de Poisson est, d'après le résultat précédent, la loi obtenue pour la modélisation limite, lorsque $n \to +\infty$ ci-dessus. Notre statistique de 3 clients par minute est alors utilisée, en un certain sens, "de manière continue", et pas via une modélisation "discrète", où notre minute aurait été découpée en un nombre finie de laps de temps.