Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°20 : Convexité

2023-2024
Mathématiques

Pour commencer

Exercice 1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

Exercice 2 Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$.

Exercice 3 Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 4 Étudier les fonctions suivantes (dont leur convexité) et tracer l'allure de leur graphe :

(a) $f(x) = e^x + e^{-x}$

(b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

(c) $f(x) = \dfrac{2\ln(x) + 3}{x}$

(d) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

(e) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2x - 3$

(f) $f(x) = -x^2 + 3x - \ln(x)$

Exercice 5 Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (inégalité de la moyenne arithmético-géométrique).

Exercice 6 En utilisant la convexité d'une fonction bien choisie, démontrer les inégalités suivantes.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1 + x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe sur I.

En déduire que pour tous $x, y \in]1, +\infty[$, on a l'inégalité $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Déterminer les points d'inflexions à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 9 Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{1}{\ln x}$. Montrer que f possède un unique point d'inflexion dans l'intervalle $]\,0{,}1\,[$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en ce point.

Exercice 10 Étudier la convexité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{xe^x}$.

Exercice 11 Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^{(x-1)x^{-2}}$ présente 3 points d'inflexion.