Annexe : variables aléatoires discrètes

*Le **19/05/2024**.*

Démonstration : Théorème de transfert, cas fini (prop. 42).

Reprenons les notations de l'énoncé. Montrons d'abord que $g(X)$ est une variable aléatoire finie (*Contrairement à ce qui a été annoncé en classe, la proposition 25 ne contient pas ce résultat*).

On a $g(X)(\Omega) = \{g(x) | x \in X(\Omega)\} = \{g(x_1), \dots, g(x_n)\}$.

Donc $g(X)(\Omega)$ est un ensemble fini (de cardinal au plus n), et $g(X)$ est bien une variable aléatoire finie, donc admet une espérance.

Notons $y_1, \dots, y_p$ les éléments deux à deux distincts de $g(X)(\Omega)$ (où $p = \mathrm{Card}\,(g(X)(\Omega))$).

Par définition :

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{p} y_i \mathbb{P}([g(X) = y_i]).$$

Quitte à énumérer différemment les éléments de $X(\Omega)$, ce qui n'a aucune influence sur la formule donnée (quitte à réorganiser les termes), on peut supposer les éléments $x_1, \dots, x_n$ rangés de la manière suivante, pour certains entiers $i_0 = 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p = n$:

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{i_1}}_{\text{Antécédents de } y_1 \text{par} g}, \underbrace{x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2}}_{\text{Antécédents de } y_2}, \dots, \underbrace{x_{i_{p-1}+1}, \dots, x_{i_p}}_{\text{Antécédents de } y_p}$$

Alors, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a la réunion disjointe :

$$[g(X) = y_k] = \bigcup_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} [X = x_j]$$

(Pour vous, interrogation possible)

Donc :

$$\mathbb{P}([g(X) = y_k]) = \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} \mathbb{P}([X = x_j]).$$

Donc avec la formule précédente :

$$\begin{aligned} E(g(X)) = &\underbrace{y_1\mathbb{P}([X = x_1]) + \dots + y_1\mathbb{P}([X = x_{i_1}]}_{\text{Antécédents de } y_1} + \\ &\underbrace{y_2\mathbb{P}([X = x_{i_1+1}]) + \dots + y_2\mathbb{P}([X = x_{i_2}]}_{\text{Antécédents de } y_2} + \\ &\dots + \\ &\underbrace{y_p\mathbb{P}([X = x_{i_{p-1}+1}]) + \dots + y_p\mathbb{P}([X = x_{i_p}]}_{\text{Antécédents de } y_p} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} E(g(X)) = &g(x_1)\mathbb{P}([X = x_1]) + \dots + g(x_{i_1})\mathbb{P}([X = x_{i_1}] + \\ &g(x_{i_1+1})\mathbb{P}([X = x_{i_1+1}]) + \dots + g(x_{i_2})\mathbb{P}([X = x_{i_2}] + \\ &\dots + \\ &g(x_{i_{p-1}+1})\mathbb{P}([X = x_{i_{p-1}+1}]) + \dots + g(x_{i_p})\mathbb{P}([X = x_{i_p}] \end{aligned}$$

Ceci donne la formule voulue.

Démonstration : Toute somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même loi est binomiale (prop. 70).

L'énoncé en $n = 0$ est vrai par conventions (aucune variable aléatoire dans la somme, donc cette somme vaut 0 par convention et désignerait donc la variable aléatoire constante égale à 0, et la définition de la loi $\mathcal{B}(0, p)$ redonne bien cela), mais il serait plus judicieux de corriger l'énoncé du cours en prenant $n \in \mathbb{N}^*$ (vous ne devriez pas avoir de tels pièges en concours).

Soit $\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $p \in]0, 1[$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'énoncé suivant :

“Pour toutes variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).\text{”}$$

Remarque. *L'énoncé en $n = 0$ est vrai par conventions (aucune variable aléatoire dans la somme, donc cette somme vaut 0 par convention et désignerait donc la variable aléatoire constante égale à 0, et la définition de la loi $\mathcal{B}(0, p)$ redonne bien cela), mais il serait plus judicieux de corriger l'énoncé du cours en prenant $n \in \mathbb{N}^*$ (vous ne devriez pas avoir de telles subtilités en concours). Faites cette correction !*

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

Initialisation.

Soit X_1 une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors, par définition,

$$X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, 1]\!], \mathbb{P}([X_1 = k]) = \binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k}.$$

Donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X_1 = 0] = 1 - p$.

Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Ceci démontre $P(1)$

Un résultat important à retenir : la loi $\mathcal{B}(1, p)$ est la loi $\mathcal{B}(p)$. C'est très clair lorsqu'on pense cela en terme de nombre de succès dans une répétition d'une seule Bernoulli de paramètre p... et ce calcul le redémontre formellement.

Hérédité.

C'est une version plus aboutie, à retenir, de l'exercice 67.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n + 1)$.

Soient donc $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toute la loi $\mathcal{B}(p)$.

Montons que $X_1 + \ldots + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n + 1, p)$.

Posons $Y = X_1 + \ldots + X_{n+1}$.

D'après $P(n)$, $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$, on a :

$$Z := X_1 + \ldots X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Montrons $Y(\Omega) = [\![0, n + 1]\!]$.

Tout d'abord, vu les lois de Z et X_{n+1} :

$$\forall w \in \Omega, Z(\omega) \in [\![0, n]\!] \text{ et } X_{n+1}(\omega) \in \{0, 1\}$$

donc par somme d'inégalités :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega) + X_{n+1}(\omega) \in [\![0, n + 1]\!].$$

On a donc $Y(\Omega) \subset [\![0, n + 1]\!]$.

Réciproquement, montrons $[\![0, n+1]\!] \subset Y(\Omega)$. Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$.

Pour montrer que $k \in Y(\Omega)$, il suffit de démontrer que $[y = k]$ n'est pas impossible, donc que $\mathbb{P}([Y = k]) \neq 0$.

Montrons cela.

Alors, k s'écrit $k = k' + e$ avec $k' \in [\![0, n]\!]$ et $e \in \{0, 1\}$ (si $k = 0$, prendre $e = k' = 0$ et sinon, prendre $e = 1$ et $k' = k - 1$).

De plus, $Y = Z + X_{n+1}$ donc $[Z = k'] \cap [X_{n+1} = e] \subset [Y = k]$.

Ainsi, pour démontrer que $\mathbb{P}([Y = k]) \neq 0$, il suffit de démontrer que $\mathbb{P}([Z = k'] \cap [X_{n+1} = e]) \neq 0$, par croissance de $\mathbb{P}$ pour l'inclusion.

On admet (voir 2A : lemme des coalitions) que $X_1, \ldots, x_{n+1}$ étant mutuellement indépendantes, Z et X_{n+1} sont indépendantes. Alors, par indépendance $\mathbb{P}([Z = k'] \cap [X_{n+1} = e]) = \mathbb{P}([Z = k'])\mathbb{P}([X_{n+1} = e])$ donc pour démontrer $\mathbb{P}([Z = k'] \cap [X_{n+1} = e]) \neq 0$, il suffit de démontrer :

$$\mathbb{P}([Z = k']) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}([X_{n+1} = e]) \neq 0.$$

Or, $k' \in Z(\Omega)$ donc (loi de Z) $\mathbb{P}([Z = k']) = \binom{n}{k'} p^{k'}(1-p)^{n-k'} \neq 0$ (produit de facteurs non nuls, car $p \in]0, 1[$ et $0 \leq k' \leq n \implies \binom{n}{k'} \neq 0$).

De plus, $e \in \{0, 1\}$ donc (loi de X_{n+1}) $\mathbb{P}([X_{n+1} = e]) \in \{p, 1-p\}$ donc $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) \neq 0$ ($p \in \{0, 1\}$ donc $p \neq 0$ et $1 - p \neq 0$.)

On a donc bien démontré l'énoncé voulu, d'où $[\![0, n+1]\!] \subset Y(\Omega)$.

Par double inclusion, **on a bien montré** $Y(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

Morale à retenir : pour étudier le support d'une somme de variables aléatoires, leur indépendance est un élément crucial. Exemple : Si X est une VAD suivant n'importe quelle loi, $X + (1 - X)$ suit la loi certaine de paramètre 1 (X et $1 - X$ ne sont pas à priori indépendantes), donc on ne pourra pas faire de déductions facilement sur le support d'une somme de variables aléatoires non indépendantes).

Montrons $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p)$.

On a déjà montré $Y(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

Soit $k \in Y(\Omega)$, montrons $\mathbb{P}([Y = k]) = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$.

$X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $([X_{n+1} = 0], [X_{n+1} = 1])$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y = k] \cap [X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([Y = k] \cap [X_{n+1} = 1.])$$

Mais $Y = Z + X_{n+1}$ donc :

$$[Y = k] \cap [X_{n+1} = 0] = [Z = k] \cap [X_{n+1} = 0] \text{ et } [Y = k] \cap [X_{n+1} = 1] = [Z = k - 1] \cap [X_{n+1} = 1].$$

On a donc :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Z = k] \cap [X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([Z = k - 1] \cap [X_{n+1} = 1])$$

et en utilisant l'indépendance entre Z et X_{n+1} :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Z = k]\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([Z = k - 1]\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]).$$

Si $k \neq 0$, alors $k - 1 \in [\![0, n]\!]$ donc la formule

$$P([Z = k - 1] = \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n-(k-1)}$$

est donnée par $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Si $k = 0$, alors $\mathbb{P}([Z = k - 1]) = \mathbb{P}(Z = -1) = 0 = \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n-(k-1)}$ car $\binom{n}{k-1} = \binom{n}{-1} = 0$ (convention permettant d'utiliser la formule du triangle de Pascal). Cette formule est donc vraie dans tous les cas.

On vérifie de même que la formule $P([Z=k]) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ est valable même si $k = n+1$ (convention $\binom{n}{n+1} = 0$)

On a donc, en utilisant aussi la loi de X_{n+1} :

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}(1-p) + \binom{n}{k-1} p^k(1-p)^{n-(k-1)}p = \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) p^k(1-p)^{n+1-k}.$$

D'après la formule du triangle de Pascal :

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \binom{n+1}{k} p^k(1-p)^{n+1-k}.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in Y(\Omega)$, Y suit bien la loi $\mathcal{B}(n+1,p)$.

Ceci conclut l'hérédité.

Démonstration : Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson (prop. 80).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire (sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Montrons que X admet une espérance.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geq 0} k\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument.

Mais pour tout entier $k \geq 0$, on a $k \geq 0$ et $\mathbb{P}([X=k]) \geq 0$ donc par produit $k\mathbb{P}([X=k]) \geq 0$.

Donc X admet une espérance si et seulement si $\sum\limits_{k \geq 0} k\mathbb{P}([X=k])$ converge, cette série étant à termes positifs.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\mathbb{P}([X=k]) = ke^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} \text{ si } k \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Donc : $\forall k \geq 1, k\mathbb{P}([X=k]) = \lambda e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \mathbb{P}([X=k-1])$.

Or, $\sum\limits_{k \geq 1} \mathbb{P}([X=k-1])$ converge, en vertu du changement de variable $k = j+1$ dans la série convergente $\sum\limits_{j \geq 0} \mathbb{P}([X=k])$ $(X(\Omega) = \mathbb{N})$.

Par linéarité, $\sum\limits_{k \geq 0} k\mathbb{P}([X=k])$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k-1]) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) = \lambda.$$

Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = \lambda$.

Montrons maintenant que X admet une variance.

Il suffit de démontrer que X^2 admet une espérance, d'après la formule de Koenig Huygens.

Mais $X^2 = X(X-1) + X$ et X admet une espérance *Rq : Passer par $X(X-1)$ rend le calcul plus pratique dans ce cas aussi, mais le "passage par $X(X-1)$" n'est pas systématique dans les exercices.*)

donc par linéarité de l'espérance, il suffit de montrer que $X(X-1)$ admet une espérance pour montrer que X^2 admet une espérance.

Il suffit donc de démontrer que la série $\sum\limits_{k \geq 0} k(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument (par transfert).

C'est le cas si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geq 2} k(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument.

Cette dernière étant à termes positifs, montrons que $\sum_{k\geq 2} k(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ converge.

On a :

$$\forall k \geq 2, k(k-1)\mathbb{P}([X=k]) = k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

De plus, $\sum_{k\geq 2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \sum_{k\geq 2}\mathbb{P}([X=k-2])$ converge en posant $k=j+2$ dans la série convergente $\sum_{j\geq 0}\mathbb{P}([X=j])$.

Donc par linéarité, $\sum_{k\geq 2} k(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}([X=k]) &= 0+0+\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}([X=k])\\ &= \lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k-2])\\ &= \lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k]) = \lambda^2.\end{aligned}$$

Finalement, $X(X-1)$ admet une espérance et $E(X(X-1)) = \lambda^2$.

Donc X^2 admet une espérance et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$.

Donc X **admet une variance** et par Koenig Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

D'où le résultat.