Correction : DS n°7

*DS du **23 mai**.*

Exercice 1 *Reste : voir cours*

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
xX_1 + yX_2 + zX_3 = 0 &\iff \begin{cases} y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ y+z=0 \end{cases} && (L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\iff \begin{cases} x+y+3z=0 \\ -3y-3z=0 \\ y+z=0 \end{cases} && (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} x+y+3z=0 \\ -3y-3z=0 \\ 0=0 \end{cases} && (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\
&\iff \begin{cases} x = z - 3z = -2z \\ y = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases} \} = \{(-2z, -z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2,-1,1)).$$

Alors :

- $\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ comme sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
- La famille $((-2,-1,1))$ est génératrice de F. Etant constituée d'un unique vecteur non nul, elle est libre et $\boxed{\text{forme donc une base de } F.}$
- Ayant une base de cardinal 1, $\boxed{F \text{ est de dimension } 1}$.

2. Appliquons la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels pour démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est clair (par définition de E, il est constitué d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- $0_3 A = 0_3$ et $A 0_3 = 0_3$ en vertu des propriétés du calcul matriciel. Donc $0_3 \in E$.
- Montrons que E est stable par les opérations.

  Soient M, N deux éléments de E et λ, μ deux réels.

  Montrons $\lambda M + \mu N \in E$.

  Par distributivité :

  $$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA$$

  et

  $$A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M) + A(\mu N) = \lambda AM + \mu AN \overset{(2)}{=} \lambda MA + \mu NA$$

  (2) : car M et N sont éléments de E.

Ces deux égalités montrent $(\lambda M + \mu N)A = A(\lambda M + \mu N)$.

Donc par définition de E, $\lambda M + \mu N \in E$, ce qui démontre ce dernier points.

$\boxed{\text{D'après la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels, } E \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

Exercice 2 *Extrait EDHEC 2022*

1. (a) Pour tous entiers p et q, l'intégrande $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est polynomiale donc est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   $\boxed{I(p,q) \text{ est donc bien définie comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.}}$

   (b) Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   On pose $u(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v(x) = (1-x)^q$.

   On définit ainsi deux fonctions polynomiales donc C^1 sur $\mathbb{R}$, et :

$$I(p,q) = \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

   Par intégration par partie :

$$I(p,q) = [u(x)v(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

   Or, $q \geq 1$ donc $0^q = 0$ et $v'(x) = q(1-x)^{q-1}$. Il vient :

$$I(p,q) = 0 - 0 + \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} q(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x = \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

   $\boxed{\text{On a bien montré } I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1,q-1), \text{ et ce pour tout } (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*.}$

2. (a) Soit p et q deux entiers naturels. On intègre à vue :

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x = \left\{ \frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right\}_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+q+1}.$$

   D'après la formule admise, on a donc :

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

   On a donc montré :

   $\boxed{\text{Pour tout } (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p+q,0) = \dfrac{1}{p+q+1} \text{ et } I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}.}$

   (b) On applique simplement la question précédente en (p,p), ce qui est possible si $p \in \mathbb{N}$.

3. soit $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   La fonction $t \mapsto t^n(1-t)^n$ est continue car polynomiale sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur le segment d'extrémités 0 et x.

   Ainsi, $\displaystyle\int_0^x t^n(1-t)^n\mathrm{d}t$ est un réel bien défini. Donc $f(x)$ est bien défini.

   Ceci étant vrai pour tout réel x,

$\boxed{f_n \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \text{ pour tout entier } n.}$

4. Pour tout réel x :

$$f_0(x) = \alpha_0 \int_0^x t^0(1-t)^0 \mathrm{d}t = \alpha_0 \int_0^x 1\mathrm{d}t = \alpha_0 x.$$

Or, $\alpha_0 = 1$. Donc :

$\boxed{f_0 : x \mapsto x}$

5. (*a*) D'après les résultats précédents :

$$f_n(1) = \alpha_n I(n,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1.$$

(*b*) Soit x un réel et n un entier.

Effectuons le changement de variable de classe C^1 donné par $u = 1-t$ dans l'intégrale

$$\int_0^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t.$$

- Posant $u = 1-t$, on a $u = 1$ si $t = 0$ et $u = 1-x$ si $t = x$.
- On a de plus $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ car la dérivée de $t \mapsto 1-t$ est $t \mapsto -1$. Donc $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$.
- Enfin, $t^n(1-t)^n = (1-u)^n u^n$ car si $u = 1-t$ alors $t = 1-u$.

Ainsi, par changement de variables :

$$\int_0^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t = \int_1^{1-x} (1-u)^n u^n \times (-1) \mathrm{d}u = -\int_1^{1-x} u^n(1-u)^n \mathrm{d}u.$$

Donc par Chasles:

$$\int_0^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t = -\int_1^{1-x} u^n(1-u)^n \mathrm{d}u = -\left(\int_0^{1-x} u^n(1-u)^n \mathrm{d}u - \int_0^1 u^n(1-u)^n \mathrm{d}u\right).$$

En multipliant par α_n les deux membres, il vient :

$$f_n(x) = -f_n(1-x) + f_n(1).$$

Or, $f_n(1) = 1$ d'après la question précédente.

$\boxed{\text{On a donc bien montré } f_n(x) + f_n(1-x) = 1, \text{ et ce pour tout réel } x.}$

(*c*) L'égalité de la question précédente appliquée en $x = \frac{1}{2}$ montre que $\boxed{f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}}$, pour tout entier n.

6. (*a*) La fonction $t \mapsto t^n(1-t)^n$ étant continue sur $\mathbb{R}$ comme polynôme, le théorème fondamental de l'analyse affirme que : $x \mapsto \int_1^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t$ est de classe C^1 et est l'unique primitive, sur $\mathbb{R}$, de cette fonction qui s'annule en 1.

En multipliant par la constante α_n, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n \text{ est } C^1 \text{ donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et :} \\ \qquad \forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \alpha_n x^n(1-x)^n. \\ \text{où l'on rappelle } \alpha_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{array}}$$

(*b*) **Si n est pair**, alors $x^n \geq 0$ et $(1-x)^n \geq 0$ pour tout réel x (puissance paire), et $\alpha_n > 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) \geq 0.$$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = 0 \iff x^n = 0$ ou $(1-x)^n = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

Si n est impair, alors x^n et $(1-x)^n$ sont du signe stricte de x et $1-x$, respectivement.

On peut donc faire le tableau de signe de f_n' dans ce cas en prenant en compte que $\alpha_n > 0$ (le faire, voir la réponse plus bas).

On trouve que f_n' est strictement positive sur $]0,1[$, nulle en 0 et 1, et strictement négative en dehors de $[0,1]$.

7. (*a*) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton:

$$\forall t \in \mathbb{R}, (1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k.$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t^n(1-t)^n = t^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{k+n}.$$

Par linéarité de l'intégrale, pour tout réel x :

$$\int_0^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^x t^{k+n} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}.$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}.$$

$\boxed{f_n \text{ est donc bien polynomiale}}$, et son monôme dominant est $(-1)^n \alpha_n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Rappelons que la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n \neq 0)$ est déterminée par son monôme dominant $a_n X^n$.

En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n \underbrace{(1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}})}_{g(x)}$$

et, lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, on a $g(x) \to 1$ sans forme indéterminée.

En particulier, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-1)^n \alpha_n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$ (car $\alpha_n > 0$ et par produit).

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^n \alpha_n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$.

Finalement,

f_n est polynomiale et : • Si n est pair, $f_n(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ • Si n impair, $f_n(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

(*b*) Simple synthèse des deux questions précédentes (faire deux tableaux, un pour chaque parité de n). La valeur en 1 est donnée en 5a) et la valeur en 0 est trivialement 0 (intégrale de 0 à 0).

8. (a) On a démontré $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$ donc f_n' est dérivable comme polynôme et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n''(x) = \alpha_n \left(n x^{n-1}(1-x)^n + x^n n (1-x)^{n-1} \times (-1)\right) = n\alpha_n x^{n-1}(1-x)^{n-1}\left((1-x)-x\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_n''(x) = n\alpha_n x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x).}$$

(b) On remarque que pour tout réel x, $f_n''(x) = n\alpha_n f_{n-1}'(x)(1-2x)$ donc on peut reprendre le tableau de signe de f_{n-1}' (la parité de $n-1$ est contraire à la parité de n) pour avoir le signe de f_n'' ($n\alpha_n > 0$).

On sait que les points d'inflexion de (C_n) sont les points en lesquels f_n'' s'annule en changeant de signe.

- Si n pair, $n-1$ est impair :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f_{n-1}'(x)$		-	0	$+$		$+$	0	-	
$1-2x$		$+$		$+$	0	-		-	
$f_n''(x)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	

- Si n impair, $n-1$ est pair :

Si $n > 1$:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f_{n-1}'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	-		-	
$f_n''(x)$		$+$	0	$+$	0	-	0	-	

Dans ce cas, (C_n) possède trois points d'inflexion (en 0, $\frac{1}{2}$ et en 1).

Pour le cas $n = 1$, $f_{n-1}'(x) = 1$ pour tout réel x donc $f_n''(x)$ est du signe stricte de $1-2x$:

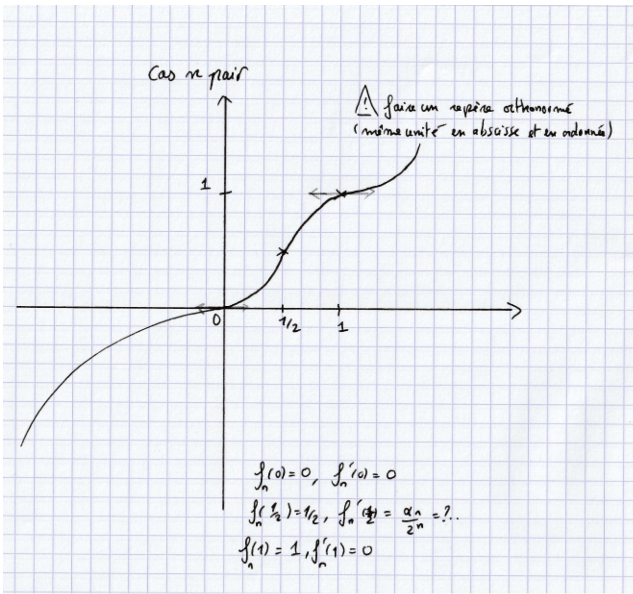
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_n''(x)$		$+$	0	-	

Dans ces cas, (C_n) possède un unique point d'inflexion en $\frac{1}{2}$ (en 0 et en 1, f_n'' s'annule si $n \neq 1$ mais en change pas de signe).

$\boxed{(C_n) \text{ admet un unique point d'inflexion si } n \text{ est impair, et trois si } n\text{est pair.}}$

(c) Question Bilan. En python avec le résultat de la 7a), un code (bonus) est donné dans le fichier corrigé en Python. Mais il faudrait mieux paramétrer matplotlib pour avoir une courbe visible.

A la main, le cas n pair (les tangentes horizontales pourrait être un peu mieux respectées...) :



Exercice 3

1. (a) Si la pièce numéro 0 est tirée (ce qui est bien possible), toute valeur $n \in \mathbb{N}^*$ peut être prise par X (par exemple, si les lancers commence par une succession de $n-1$ côtés Face suivie d'un pile). Si la pièce 2 est tirée (ce qui est possible), X prend la valeur 0 à coup sûr.

   Finalement, $\mathbb{N} \subset X(\Omega)$.

   X étant clairement à valeurs entières : $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}.}$

   (b) $[X = 1]$ est l'événement "Le premier lancer de la pièce choisie tombe sur Pile".

   (A_0, A_1, A_2) forme clairement un système complet d'événements. Le choix des pièces étant fait en situation d'équiprobabilité, ces événements ont tous une probabilité de $\frac{1}{3} \neq 0$.

   D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}([X = 1]) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}([X = 1]) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}([X = 1]).$$

   Mais la pièce 2 faisant Face à coup sûr, $\mathbb{P}_{A_2}([X = 1]) = 0$ (le premier lancer n'est pas un Pile).

   La pièce 1 faisant Pile à coup sûr, $\mathbb{P}_{A_1}([X = 1]) = 1$.

   a pièce 0 étant équilibrée, $\mathbb{P}_{A_0}([X = 1]) = \frac{1}{2}$ (le premier lancer tombe sur Pile avec probabilité $\frac{1}{2}$).

   Donc $\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

   La même application de la formule des probabilités totales qu'à la question précédente donne :

$$\mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}([X = n]) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}([X = n]) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}([X = n]).$$

   Mais $n \geq 2$ donc $\mathbb{P}_{A_1}([X = n]) = \mathbb{P}_{A_2}([X = n]) = 0$ (si la pièce fait Pile à coup sûr ou Face à coup sûr, Pile tombe dès le premier lance rou ne tombe jamais, donc ne tombe pas au n ième lancer car $n \geq 2$).

   De plus, $\mathbb{P}_{A_0}([X = n]) = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n$ car on peut utiliser la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ pour déterminer la probabilité d'obtenir le premier Pile au n ième lancer avec la pièce numéro 0, celle-ci ayant probabilité $\frac{1}{2}$ de faire Pile.

   Rq: Cet argument plus rapide, est à bien avoir en tête pour la 2A. Ici, vous pouviez aussi procéder en refaisant le raisonnement vu plusieurs fois en cours mais dans une version plus fine :

$$\mathbb{P}_{A_0}([X = n]) = \mathbb{P}_{A_0}((\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{P}_i) \cap P_n).$$

   Or, sachant que la pièce A_0 est choisie, les événements $\bar{P}_1$, ..., $\bar{P}_{n-1}$ P_n deviennent mutuellement indépendants car les lancers d'une même pièce sont mutuellement indépendants.

   Autrement dit :

   Les événements $\bar{P}_1$, ..., P_n sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}_{A_0}$.

   Donc par indépendance :

$$\mathbb{P}_{A_0}([X = n]) \overset{(2)}{=} (\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}_{A_0}(\bar{P}_i)) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_n).$$

   ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

Si vous n'étiez pas capable d'argumenter avec $\mathbb{P}_{A_0}$, une explication que les lancers de la pièce 0 sont mutuellement indépendants suffisait à justifier l'égalité (2).

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(*d*) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc par théorème, $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}([X = k])$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

Donc :

$$\mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

D'où, avec les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 0]) &= 1 - \mathbb{P}([X = 1]) - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \times 2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(1) : par linéarité.

(2) : par changement de variable

(3) : on reconnait la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

Donc $\boxed{\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{3}.}$

On pouvait procéder autrement en utilisant la formule des probabilités totales comme dans les questions précédentes, mais ce n'est pas vers là que le sujet vous amenait (Les "En déduire" sont à respecter au maximum), et il aurait donc fallu refaire intégralement le raisonnement de la question 3 de l'exo 1 (maladresse de ma part d'avoir mis cette question de cours, vous auriez pu l'invoquer ici).

2. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc X admet une espérance ssi $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}([X = k])$ converge absolument.

Cette série étant à terme positifs, il suffit pour cela qu'elle converge ($\forall k \geq 0, k \geq 0$ et $\mathbb{P}([X = k]) \geq 0$).

Par non incidence des premiers termes sur la convergence d'une série, il suffit pour cela que $\sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}([X = k])$ converge.

Or :

$$\forall k \geq 2, k\mathbb{P}([X = k]) = k\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{6} \cdot k(\frac{1}{2})^{k-1}.$$

La série $\sum_{k\geq 2} k(\frac{1}{2})^{k-1}$ converge comme série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ (au rang du premier terme près) donc par linéarité, $\sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}([X=k])$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) = 0\mathbb{P}([X=0]) + 1\mathbb{P}([X=1]) + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k(\frac{1}{2})^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k(\frac{1}{2})^{k-1}.$$

Enfin :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(\frac{1}{2})^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(\frac{1}{2})^{k-1} - 1 = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3.$$

Finalement,

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1.}$$

3. *Remarque : comme vu 2 fois en cours, on pouvait passer par $E(X(X-1))$ pour économiser du calcul. Je met ici la version plus pédestre à savoir appliquer systématiquement.*

Montrons que X admet un moment d'ordre 2, c'est à dire que X^2 admet une espérance. X^2 est à valeurs entières, donc c'est le cas si et seulement si $\sum_{k\geq 0} k^2\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument, d'après le théorème de transfert.

La série $\sum_{k\geq 0} k^2\mathbb{P}([X=k])$ est à termes positifs, donc il suffit pour cela qu'elle converge ($\forall k \geq 0, k^2 \geq 0$ et $\mathbb{P}([X=k]) \geq 0$).

Enfin, il suffit pour cela que $\sum_{k\geq 2} k^2\mathbb{P}([X=k])$ converge. Or :

$$\forall k \geq 2, k^2\mathbb{P}([X=k]) = k(k-1)\mathbb{P}([X=k]) + k\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{12}\cdot k(k-1)(\frac{1}{2})^{k-2} + k\mathbb{P}([X=k]).$$

La séries $\sum_{k\geq 2} k(k-1)(\frac{1}{2})^{k-2}$ converge en tant que série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, et $\sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}([X=k])$ converge d'après la question précédente, donc par linéarité :

$\sum_{k\geq 2} k^2\mathbb{P}([X=k])$ converge et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k^2\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(\frac{1}{2})^{k-2} + \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{12}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$$

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\mathbb{P}([X=k]) = 0 + 1^2\mathbb{P}([X=1]) + \frac{1}{12}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{2} = \ldots = \frac{7}{3}.$$

(On a vu lors de la question précédente : $\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{2}$).

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$\boxed{X \text{ admet une variance et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}.}$$

4. Le rôle des côtés Pile et Face est interchangeables dans l'expérience aléatoire considérée, quitte à échanger le rôle des pièces 1 et 2 qui sont choisies avec la même probabilité (la pièce 0 est équilibrée). Donc pour tout entier k, la probabilité d'avoir le premier Pile au k ième lancer est la même que celle d'avoir le premier Face au k ième lancer.

   ainsi, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$

5. (*a*) Soit $j \geq 2$. $[Y = j] \cap [X = 1]$ est réalisé si et seulement si le premier lancé donne Pile, et le premier Face a lieu lors du j ième lancer.

   Mais $[Y = j]$ implique $[X = 1]$ *(rappel : on dit qu'un événement A implique un événement B si $A \subset B$)* car si le premier face a lieu au j ième lancer, le premier est nécessairement un Pile ($j \geq 2$).

   Donc $[Y = j] \cap [X = 1] = [Y = j]$.

   $\boxed{\text{Donc } \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j]).}$

   (*b*) Même argumentation qu'à la question précédente.

   (*c*) Y suit la même loi que X, donc $\mathbb{P}([Y = 2]) = \mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{12}$ (par 1c)).

   Ainsi, $\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 2]) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{24}$.

   D'autre part, $\mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 1]) = \mathbb{P}([Y = 2]) = \dfrac{1}{12}$ par la question précédente.

   On a donc $\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 2]) \neq \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 1])$.

   Ceci prouve que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

6. (*a*) X et Y sont à valeurs entières, et $Z = X + Y$ donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

   De plus, X et Y étant positives :

$$[Z = 0] = [X = 0] \cap [Y = 0].$$

   Cet événement est impossible, car le premier lancé de la pièce choisie tombe forcément sur Pile ou sur Face.

   Donc Z ne prends pas la valeur 0.

   De plus,

$$[Z = 2] = ([X = 0] \cap [Y = 2]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 0]).$$

   Si on ne fait jamais Pile, alors $[X = 1]$ est réalisé et si on ne fait jamais face, alors $[Y = 1]$ est réalisé. Donc les événements $[X = 0] \cap [Y = 2]$ et $[X = 2] \cap [Y = 0]$ sont impossibles.

   Enfin, $[X = 1] \cap [Y = 1]$ est aussi impossible car le premier lancer ne peut donner à la fois Pile et Face.

   Finalement, $\boxed{[Z = 2] \text{ est impossible}}$ comme réunion d'événements impossibles, donc Z ne prends pas la valeur 2.

   Enfin, $[Z = 1]$ est possible (par exemple si la pièce 1 est choisie) et si $k \geq 2$, alors $[Z = k]$ est possible (en choisissant la pièce 0 et en obtenant le premier Pile au $k - 1$ ième lancer, par exemple).

   Finalement, $\boxed{Z \text{ prends toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.}}$

   (*b*) On a $[Z = 1] = ([X = 0] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 0])$.

   Les événements de cette réunion sont incompatibles, et $\mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}([Y = 0]) = \dfrac{1}{3} \neq 0$ donc :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \mathbb{P}([X = 0])\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) + \mathbb{P}([Y = 0])\mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]).$$

   Enfin, $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) = \mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]) = 1$ car par exemple, si la Pièce choisie ne fait jamais Pile, alors elle fait Face au premier lancer.

   Donc :

$\boxed{\mathbb{P}([Z=1]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.}$

(c) Soit $n \geq 3$.

$(P_1, \bar{P}_1)$ est un système complet d'événements donc :

$$[Z=n] = (P_1 \cap [Z=n]) \cup (\bar{P}_1 \cap [Z=n]).$$

Or, $P_1 = [X=1]$ et $\bar{P}_1 = [Y=1]$. Il vient :

$$[Z=n] = ([X=1]\cap[X+Y=n])\cup([Y=1]\cap[X+Y=n]) = ([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1]).$$

$\boxed{\text{Ceci démontre l'égalité voulue, pour tout } n \geq 3.}$

(d) Soit $n \geq 3$. La réunion donnée dans la question précédente est incompatible (car $[X=1]$ et $[Y=1]$ le sont) donc :

$$\mathbb{P}([Z=n]) = \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=n-1]) + \mathbb{P}([Y=1] \cap [X=n-1]).$$

D'après les question 5a) et 5b) ($n \geq 3$ donc $n-1 \geq 2$) :

$$\mathbb{P}([Z=n]) = \mathbb{P}([Y=n-1]) + \mathbb{P}([X=n-1]).$$

Mais Y et X suivent la même loi, donc par 1c) :

$$\mathbb{P}([Z=n]) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1}.$$

Finalement, $\boxed{\forall n \geq 3, \mathbb{P}([Z=n]) = \frac{2}{3}\frac{1}{2^{n-1}}.}$

Exercice 4 *Questions d'informatique : voir le fichier DS07c-Python.py. L'énoncé déposé sur Cahier de Prépa a été très légèrement modifié (coquille signalée en DS retirée, question 1c) changée (voir plus bas) et une petite modification sur une commande donnée pour la postérité - ce qui n'avais pas d'incidence sur le DS, voir corrigé Python.*

1. (a) Voir cours.

   (b) Voir cours.

   (c) Voir cours (Lemme). Remarque : maladresse dans l'énoncé (le raisonnement montre "au plus $n-1$") mais ça n'empêche pas de conclure donc aucun problème.

2. $S = [\![2, 7]\!]$, et $A = \{\{2,4\},\{2,6\},\{3,6\},\{3,7\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}$.

3. (a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec la numérotation de 1 à n induite par les sommets (le sommet i est numéroté $i+1$).

   (b) Python

   (c) On calcule J^2 et on trouve $J^2 = 4J$.

   Une récurrence classique à rédiger montre alors :

$$\forall k \geq 1, J^k = 4^{k-1}J.$$

   On vérifie : cette formule n'est pas valable pour $k=0$.

(*d*) Immédiatement, $M = J - I_4$ donc M est bien combinaison linéaire de J et I_4.

(*e*) $\boxed{\text{Si } k = 0, \text{ alors } M^k = I_4.}$

Soit maintenant $k \geq 1$.

J et $-I_4$ commutent car I_4 (et donc $-I_4$) commute avec tout élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
M^k = (J + (-I_4))^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} J^j (-I_4)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} J^j (-1)^{k-j} I_4 \\
&\overset{(1)}{=} (-1)^k I_4 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} J^j \\
&\overset{(2)}{=} (-1)^k I_4 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 4^{j-1} \cdot J \\
&\overset{(3)}{=} (-1)^k I_4 + \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 4^{j-1} \right) \cdot J
\end{aligned}$$

(1) : Car $I_4^{k-j} = I_4$ pour tout j convenable.

(2) : D'après la question précédente, et car $j \geq 1$ dans cette somme.

(3) : Par linéarité du produit d'un réel par une matrice.

Or,

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 4^{j-1} = \frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 4^j - (-1)^k \right) = \frac{(4-1)^k - (-1)^k}{4}.$$

donc :

$$\boxed{M^k = (-1)^k I_4 + \frac{3^k - (-1)^k}{4} J, \text{ pour tout } k \geq 1.}$$

6. On vérifie facilement que $\{6, 7\}$ est un ensemble de sommet dominant.

Il est minimal, car sinon il existerait un ensemble dominant de cardinal 1, mais on voit clairement qu'aucun sommet n'est voisin de tous les autres sommets.

12. (*a*) On calcule : $D(2) = \frac{7}{2}$.

(*b*) Soit i un sommet de G.

Alors, pour tout sommet $j \neq i$, $d(i,j) \geq 0$, donc (avec la convention) $\frac{1}{d(i,j)} \geq 0$.

Alors, $D(i)$ est positif comme sommet de réels positifs.

D'autre part, si $i \neq j$, alors $d(i,j) \geq 1$ (seul le sommet i est relié au sommet i par un chemin de longueur 0, et cette inégalité est compatible avec la convention lorsque $d(i,j) = +\infty$).

Donc, toujours en restant compatible avec la convention : $\frac{1}{d(i,j)} \leq 1$.

Par somme d'inégalité, $D(i) \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} 1 = n - 1$.

$\boxed{\text{On a bien montré } 0 \leq D(i) \leq n-1 \text{ pour tout sommet } i.}$

(c) Si $D(i) = 0$, alors nécessairement $\dfrac{1}{d(i,j)} = 0$ pour tout sommet $j \neq i$ (une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul).

Cela est équivalent à dire $d(i,j) = +\infty$ pour tout j, d'après la convention utilisée.

Ainsi, $\boxed{D(i) = 0 \text{ si et seulement si } i \text{ est un sommet isolé.}}$

D'autre part, si $D(i) = n-1$, alors l'inégalité $\dfrac{1}{d(i,j)} \leq 1$ établie en question précédente (pour $j \neq i$) ne peut être stricte pour aucun sommet $j \neq i$ (sinon, on aurait $D(i) < n-1$).

Donc pour tout $j \neq i$, $\dfrac{1}{d(i,j)} = 1$ d'où $d(i,j) = 1$ pour tout $j \neq i$.

Ainsi, $\boxed{\text{Si } D(i) = n-1, \text{ alors } i \text{ est voisin de tous les autres sommets.}}$

(d) Soient i, j et k trois sommets de G.

Il faut procéder par disjonction des cas.

Premier cas : Si k n'est relié pas relié à i ou j par une chaîne.

Dans ce cas, l'inégalité voulue est triviale car $d(i,k) + d(j,k) = +\infty$.

2e cas : Sinon, k étant relié à i et j par une chaîne, i et j sont reliés par une chaîne passant par le sommet k.

Soit c une chaîne minimale de i à k et c' une chaîne minimale de k à j. Alors, la concaténation ("chaîne obtenue en mettant bout à bout") de c et de c' est une chaine de longueur $d(i,k) + d(k,j)$ reliant i et j.

Par définition de $d(i,j)$, $d(i,j)$ est inférieur à la longueur de cette chaîne.

Donc dans tous les cas, $\boxed{d(i,j) \leq d(i,k) + d(k,j).}$

16. $\{3,6,7\}$ est une clique de G_1. On remarque que la matrice d'adjacence du sous graphe induit par cette clique est celle associée au graphe complet d'ordre 3.

On remarque que c'est général : un ensemble de sommet est une clique si et seulement si le sous graphe induit par ces sommets est un sous graphe complet.

— Fin du corrigé —