Programme de colle n^o 28 : Variables aléatoires discrètes : chapitre complet.

Semaine du lundi ***20 mai****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Programme identique à celui de la semaine dernière.

Variable aléatoire, variable aléatoire discrète

28.1 Voir PC 26 : Variables aléatoires, support, événements associés à une variable aléatoire, variables aléatoires discrètes, système complet d'événements $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ associé à une variable aléatoire discrète X (sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), somme des probabilités de ces événements, loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition.

28.2 Indépendance (mutuelle) de 2, de n variables aléatoires discrètes (définies sur un même espace probabilisé). Soient X et Y deux VAD indépendantes et I, J des parties de $\mathbb{R}$, chacune étant un intervalle ou un ensemble fini, alors les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants.

28.3 Transformées de variables aléatoires discrètes : variables aléatoires de la forme $g(X)$ (g fonction réelle), $X + Y$ ou XY pour X, Y des VAD. Exemples de détermination de la loi d'une variable aléatoire de la forme $g(X)$ connaissant la loi de X, dans des cas simples.

Des cas plus élaborés de VAD de la forme $g(X)$ avec g non bijective seront traités en TD.

Moments d'une variable aléatoire : espérance, variance.

28.4 Espérance d'une variable aléatoire discrète : définitions (cas fini, cas infini), proposition admise : pour le cas infini, la convergence absolue en hypothèse assure que la définition est bien posée. Linéarité de l'espérance. Positivité de l'espérance. Toute variable aléatoire discrète à valeurs positives d'espérance nulle est presque-sûrement nulle. Corollaire : si une VAD X prends ses valeurs dans un intervalle réel I et admet une espérance, alors $E(X) \in I$. Notion de variable aléatoire centrée, variable aléatoire centrée associée à une VAD admettant une espérance.

28.5 Théorème de transfert : cas fini (démonstration peu formelle exigible), cas infini (admis).

28.6 Variance d'une variable aléatoire discrète : définitions (cas fini et infini). Si une VAD X admet une variance, alors $V(X) \geq 0$ et $V(X) = 0$ ssi X est presque-sûrement constante. Écart-type.

28.7 Lemme admis : Soit X une VAD telle que X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance. Formule de Koenig-Huygens. Moment d'ordre 2 d'une VAD. Routine : utilisation combinée du théorème de transfert et de la formule de Koenig-Huygens. Variance d'une transformée affine d'une VAD admettant une variance. Variable aléatoire discrète centrée réduite, variable aléatoire centrée réduite associée à une VAD admettant une variance non nulle.

28.8 Illustration de toutes ces notions dans le cas d'une variable aléatoire donnant le rang du premier pile lors d'une succession de lancers d'une pièce à pile ou face (loi géométrique).

Lois usuelles finies

28.9 Une motivation pour s'intéresser aux lois des VAD: si deux VAD X et Y ont la même loi, alors X admet une espérance (resp. une variance) ssi Y admet une espérance (resp. une variance), et dans ce cas $E(X) = E(Y)$ (resp. $E(X) = E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$).

28.10 Loi certaine, espérance et variance. Toute variable aléatoire discrète admettant une variance nulle suit une loi certaine de paramètre $E(X)$.

28.11 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$: définition, espérance et variance. Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b - a + 1]\!])$. Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

28.12 Loi de Bernoulli : définition, espérance, variance.

28.13 Loi binomiale : définition, espérance, variance. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Lois usuelles infinies

28.14 Loi géométrique : définition, espérance, variance. Fonction de survie, fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique. Toute VAD X suivant une loi géométrique est "sans mémoire".

28.15 Loi de Poisson : définition, espérance, variance. Proposition de "convergence en loi" de lois binomiales vers une loi de Poisson.

La notion de convergence en loi est hors programme cette année. La proposition portant sur la convergence des binomiales vers une loi de Poisson n'a été vue que pour une suite (X_n) de VAD telle que, pour un certain $\lambda > 0$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ pour tout n.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion d'indépendance mutuelle pour un nombre fini d'événements. Énoncer la définition et la proposition portant sur la notion d'indépendance pour les variables aléatoires, et démontrer la proposition dans le cas vu en cours (pour l'appartenance à des ensembles finis).
2. Énoncer les deux propositions relatives aux transformées de variables aléatoires discrètes. Soit X une VAD telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.
3. Définir la notion d'espérance pour une variable aléatoire discrète. Énoncer la proposition de linéarité de l'espérance, et la démontrer dans le cas d'une transformation affine.
4. Énoncer le théorème de transfert et le démontrer dans le cas fini (colleurs : preuve assez informelle mais très claire). Soit X une VAD telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour $p \in]0,1[$. Étudier l'existence de $E(e^X)$, et la calculer lorsque cette espérance existe.
5. Définir la notion de variance pour une variable aléatoire discrète. Énoncer et démontrer la proposition (46) portant sur le signe d'une variance, et sur les VAD de variance nulle. Démontrer la proposition (51) portant sur la variance d'une transformée affine d'une VAD admettant une variance.
6. Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.

Les démonstrations des résultats ci-dessous sont exigibles.

1. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
3. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$.
4. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.