Chapitre 22 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2.

ECG1 A, Lycée Hoche

Le but de ce chapitre est de découvrir la notion d'équation différentielle, et d'apprendre à résoudre certaines équations différentielles linéaires : les équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants. On va de plus voir comment ces techniques nous permettent de résoudre d'autres équations différentielles plus compliquées, et enfin, d'entrevoir la raison pour laquelle les équations différentielles apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes.

I. Généralités sur les équations différentielles linéaires.

1. Introduction : dynamique des populations

Nous allons voir comment deux modèles d'études de l'évolution d'une population s'appuient sur des équations différentielles.

Dans chaque modèle, on modélise la progression d'une population comme une fonction $P : t \mapsto P(t)$, où t est une variable représentant le temps (en années par exemple), et pour t un réel, $P(t)$ est la taille de cette population à l'instant t. On a fixé une date de référence, identifiée à $t = 0$. Par exemple, si l'on considère que le premier janvier 1900 est la référence en $t = 0$, alors $P(50)$ sera la population au premier janvier 1950.

L'accroissement moyen entre deux temps t_1 et t_0 est alors la quantité $\dfrac{P(t_1) - P(t_0)}{t_1 - t_0}$, son unité est l'habitant par année. Dans l'exemple précédent, $\dfrac{P(50) - P(0)}{50 - 0}$ est bien l'accroissement annuel moyen de la population entre 1950 et 1900.

Si on regarde la limite de $\dfrac{P(t_1) - P(t_0)}{t_1 - t_0}$ lorsque $t_1 \to t_0$, on tombe mathématiquement sur $P'(t_0)$, et, du point de vue de la modélisation, sur la vitesse instantanée de croissance annuelle de la population P au moment t_0.

a) Un modèle de croissance naïf

Voyons une première modélisation naïve, mais qui convient dans certains cas simples (par exemple, pour l'étude d'une population de bactéries dans un milieu alimenté en nutriments). Dans cette modélisation, on considère que l'accroissement de la population est proportionnel à cette population. Autrement dit, il existe un réel a tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P'(t) = aP(t).$$

Cette constante a a alors un sens direct : le nombre de nouvel individu annuel par individu de la population. On suppose ici ce nombre constant (nos bactéries se reproduisent toujours à la même vitesse). On peut prendre des considérations plus précises et, par exemple, inclure le décès dans cette modélisation : si une population a plus de décès annuel que de nouvel individu annuel (par individu), le coefficient a sera alors négatif. S'il y a en moyenne un décès annuel par individu (courte espérance de vie) mais que chaque individu donne annuellement lieu, en moyenne, à 3 nouveaux individus, on pourra par exemple prendre $a = 2$.

Ainsi, pour avoir une modélisation P de la progression de notre population, on est mené à chercher une (les) fonction P telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, P'(t) = aP(t)$$

et telle que $P(0)$ soit la population $p_0 \in \mathbb{R}$ (supposée connue) à l'instant 0.

On dira alors qu'on doit résoudre *l'équation différentielle* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y' - ay = 0$$

(d'inconnue y), et quand on inclut une "condition initiale", on dira qu'on doit résoudre *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' - ay = 0 \\ y(0) = p_0 \end{cases}.$$

Cette équation différentielle est dite linéaire d'ordre 1, et nous serons capable de la résoudre.

Généralement, les équations différentielles ont une infinité de solutions, mais tout système de Cauchy "bien posé" (hors programme) admet une unique solution.

Un modèle de croissance plus compliqué : l'équation logistique

Dans cette seconde modélisation moins naïve, on prends en compte l'épuisement des ressources. Le terme $aP(t)$ est toujours présent, et cette-fois ci, a est supposé positif (coefficient de croissance). On introduit en plus un terme de décroissance de la population P, de la forme $-baP^2(t)$ où b est un nouveau réel positif (une constante d'ajustement, représentant grosso-modo la consommation annuelle d'un individu, et comment cet épuisement des ressources affecte la croissance de la population).

Le carré est mis sur P pour modéliser un épuisement des ressources sur la durée (plus subtil) :

$$\int_0^{P(t)} abxdx = abP^2(t)$$

L'équation différentielle obtenue par ce modèle est appelée *l'équation logistique :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, P'(t) = aP(t) - abP^2(t)$$

plus souvent écrite sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, P'(t) = aP(t)(1 - bP(t)).$$

Pour donner la fonction "de population" P découlant de ce modèle, on dit qu'on doit résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y' - ay(1 - by) = 0$$

d'inconnue la fonction y, et où a et b sont des réels (positifs) donnés.

Cette équation est dite non linéaire, car il y a un terme en y^2. Elle est dite d'ordre 1, car la dérivée de plus haut rang intervenant est d'ordre 1.

A priori, nous n'apprenons pas à résoudre les équations non linéaires dans ce cours (c'est souvent impossible), mais nous verrons que nous sommes capables de résoudre l'équation logistique en effectuant un changement de "fonction inconnue".

2. Notion d'équation différentielle linéaire

Attention, encore une fois, il y a toujours un **intervalle** d'étude.

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n* toute équation

$$(E) : \forall t \in I, y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = b(t)$$

où :
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles données continues sur I,
- l'inconnue est la fonction n fois dérivable $y : I \to \mathbb{R}$.

Avec ces notations :

(*i*) On appelle *solution de* (E) toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = b(t).$$

(*ii*) *Résoudre* l'équation différentielle (E), c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

(*iii*) Quand les fonctions $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ et l'intervalle I sont explicités, l'équation différentielle (E) est couramment notée :

$$(E) : y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = b(t).$$

C'est un abus de notation habituel (On ne note pas forcément la dépendance des $y^{(k)}$ en la variable t).

(*iv*) Les fonctions $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont appelées les *coefficients* de l'équation différentielle (E).

(*v*) La fonction b est appelée le second membre de (E).

Remarque. Si l'intervalle d'étude n'est pas donné, il faut trouver un intervalle le plus grand possible sur lequel les coefficients et le second membre sont définis. La variable est aussi couramment notée t que x.

Remarque. Dans une équation différentielle linéaire d'ordre n, il y a par définition "un coefficient 1" devant $y^{(n)}$ (qu'on ne nomme pas coefficient). C'est une convention courante, qui a ses subtilités.

Exemple 2. (*i*) $y'' + 3ty = t^2$ est une équation différentielle ….

- Elle est à priori définie sur …
- car …
- Son second membre est ….
- Ses coefficients sont ….

(*ii*) L'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y'' + 3ty = 2y'$ est une équation différentielle ….

- Son second membre est ….
- Ses coefficients sont ….

(*iii*) $y^{(3)} + 3y' - y = t^2$ est une équation différentielle ….

- Elle est à priori définie sur …
- car …
- Son second membre est ….
- Ses coefficients sont ….

(*iv*) Que dire de l'équation différentielle $y^3 + 3yy' = -1$?

Voici du vocabulaire qu'on utilisera à chaque exercice.

Définition 3. (*i*) On dit qu'une équation différentielle linéaire est *à coefficients constants* si ses coefficients sont des fonctions constantes.

(*ii*) On dit qu'une équation différentielle linéaire est *homogène* si son second membre est la fonction nulle.

Exemple 4. (*i*) $y'' + 4y' - 3y = 0$ est ...

(*ii*) $y' + 3y = e^t$ est ...

(*iii*) $y'' + 2y' + y = xe^{2x}$ est ...

Enfin, pour résoudre une équation différentielle linéaire, nous passerons systématiquement par son équation différentielle homogène associée.

Définition 5. Soit I un intervalle et n un entier. Considérons une équation différentielle (E) linéaire d'ordre n sur I :

$$(E) : y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = b(t)$$

On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation différentielle linéaire homogène (E_h) sur I donnée par

$$(E_h) : y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = 0.$$

Remarque. Pour obtenir l'équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire, on remplace donc simplement son second membre par la fonction nulle.

Exemple 6. L'équation différentielle linéaire homogène associée à $y'' + 3y' - 2y = te^t$ (définie sur ...) est:

$$\ldots$$

Remarque. (*i*) Une équation différentielle linéaire à coefficients constants est bien définie sur tout intervalle sur lequel son second membre est bien défini (ses coefficients sont définis sur $\mathbb{R}$).

(*ii*) Une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Notation Dans toute la suite du cours, si (E) est une équation différentielle linéaire, on notera $\mathrm{Sol}(E)$ l'ensemble des solutions de (E). **Ce n'est pas une notation standard** : en DS/concours, on pourra introduire cette notation en écrivant par exemple en début d'exercice:

"Déterminons l'ensemble $\mathrm{Sol}(E)$ des solutions de (E)".

3. Le principe de superposition pour les équations différentielles linéaires

Idée. Pourquoi les équations différentielles linéaires sont-elles plus sympathiques à résoudre?

Voici le théorème un peu subtil du cours sur lequel s'appuie toutes nos résolutions d'équations différentielles. Vous devez bien comprendre sa forme générale ci-dessous, ainsi que ses conséquences aux paragraphe suivant. La démonstration est élémentaire et doit être bien comprise.

Proposition 7. *Soit I un intervalle et n un entier. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n sur I :*

$$(E) : y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = b_1(t) + b_2(t)$$

où b_1 et b_2 sont des fonctions continue sur I. Notons (E_1) et (E_2) les équations différentielles définies sur I par :

$$(E_1) : y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = b_1(t)$$

$$(E_2) : y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = b_2(t)$$

Supposons l'existence d'une solution $f_1 : I \to \mathbb{R}$ de (E_1).
Alors, pour toute fonction n fois dérivable $f_2 : I \to \mathbb{R}$, il est équivalent de dire :

(i) f_2 est solution de (E_2), et

(ii) $f_1 + f_2$ est solution de (E).

Démonstration. À noter. □

Exemple 8. Pour résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' + 3y = t + e^t$, on peut, d'après le principe de superposition, s'intéresser aux équations différentielles définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E_1) : y' + 3y = t \text{ et } (E_2) : y' + 3y = e^t.$$

Nous utiliserons à chaque exercice le corollaire suivant.

Proposition 9. *Avec les mêmes notations que dans l'énoncé ci-dessus, si $f_1 \in \mathrm{Sol}(E_1)$ est une solution donnée de (E_1), alors:*

$$\mathrm{Sol}(E) = \{f_1 + f_2, f_2 \in \mathrm{Sol}(E_2)\}.$$

Démonstration. À noter pour l'ordre 2. □

Exemple 10. (fondamental) Pour résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - y = 1$ (définie sur $\mathbb{R}$), on peut appliquer le principe de superposition pour se ramener à résoudre l'équation différentielle homogène (E_h) associée à (E). En effet,

$$(E) : y' - y = 1 + 0$$

donc si f_p est **une** solution (on dit souvent "**particulière**") de (E), alors par superposition, **l'ensemble des solutions** de (E) est

$$\{f_p + g, g \in \mathrm{Sol}(E_h)\}.$$

Trouver une solution particulière f_p de (E) peut être relativement simple : ici, on constate que la fonction constante valant -1 est solution de (E).

Pour trouver l'ensemble des solutions de (E_h), on aura des techniques valables dans certains cas. Ici, on saura démontrer que :

$$Sol(E_h) = \{t \mapsto Ce^t, C \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, les fonctions solutions de (E_h) sont les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$t \mapsto Ce^t$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

Par superposition, on a alors:

$$Sol(E) = \{\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & Ce^t - 1 \end{array} \right., C \in \mathbb{R}\}.$$

Par exemple, des solutions de (E) sont $t \mapsto 2e^t - 1$, $t \mapsto \pi e^t - 1, t \mapsto \sqrt{2}e^t - 1 \ldots$.

4. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

Proposition 11. *Soit (E_h) une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n définie sur un intervalle I. Notons $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*
Alors, l'ensemble $\mathrm{Sol}(E_h)$ des solutions de (E_h) est une sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ (muni des opérations usuelles).
Autrement dit :

(i) *Toute fonction solution de (E_h) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

(ii) *La fonction nulle est solution de (E_h).*

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathrm{Sol}(E_h), \lambda f \in \mathrm{Sol}(E_h)$.

(iv) $\forall (f,g) \in \mathrm{Sol}(E_h)^2, f+g \in \mathrm{Sol}(E_h)$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Vous ne devriez être confronté qu'aux cas de l'ordre 1 et de l'ordre 2.

Exercice 12. Les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-t}$, pour λ et μ des réels. Vérifier l'énoncé ci-dessus dans ce cas.

II. Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sur un intervalle I est donc une équation différentielle (E) de la forme :

$$(E) : y' + ay = b(t)$$

où a est une constante réelle, et où b est une fonction continue sur I.

L'équation différentielle homogène(E_h) associée à (E) est alors:

$$(E_h) : y' + ay = 0.$$

Toute la stratégie de résolution de ces équations différentielles est basée sur le principe de superposition ci-dessus, sous la forme suivante.

Proposition 13. *Soit $(E) : y' + ay = b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sur un intervalle I. Soit (E_h) l'équation différentielle homogène associée à E.*
Pour toute solution f_p de (E), l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathrm{Sol}(E) = \{f_p + f_h, f_h \in \mathrm{Sol}(E_h)\}.$$

Méthode

Pour résoudre une "EDLO1CC" (pas sur les copies!) (E) comme ci-dessus,

(i) On résout l'équation différentielle homogène (E_h) associée à (E),

(ii) On détermine *une* solution de (E)

(iii) On utilise le principe de superposition.

Exemple 14. À noter.

1. Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants

Tout simplement :

Proposition 15. *Soit a un réel. Les solutions de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$(E_h) : y' + ay = 0$$

sont les fonctions de la forme $\left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & Ce^{-at} \end{array} \right.$ *, pour $C \in \mathbb{R}$. Autrement dit,*

$$\text{Sol}(E_h) = \ldots$$

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 16. (i) Donner deux solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + 3y = 0$:

(ii) Donner l'ensemble des solutions de $y' - y = 0$:

Exercice 17. L'accroissement d'une population de Xérus est proportionnel à cette population. Cette population a doublé en 50 ans. En combien de temps triplera-t-elle?

2. Recherche d'une solution particulière pour les EDLO1CC : la variation de la constante

Méthode : Pour déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, on peut d'abord être guidé. Mais cela sera surtout vrai dans le cas de l'ordre 2.

Exemple 18. Déterminer une solution de $(E) : y' + y = 2t + 1$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto at + b$, où a et b sont réels. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

On a une méthode plus générale.

Méthode de variation de la constante

Pour déterminer une solution de $(E) : y' + ay = b(t)$ définie sur un intervalle I :

(i) On résout son équation homogène associée $y' + ay = 0$ sur I. Ses solutions sont les fonctions définie sur I de la forme $t \mapsto Ce^{-at}$, pour C réel.

(ii) On cherche une solution f_p de (E) sous la forme "$f_p(t) = C(t)e^{-at}$" (slogan à ne pas écrire sur copie). Plus précisément on détermine une condition sur "la fonction C" pour que f_p soit solution. On peut suivre rigoureusement le schéma de rédaction suivant :

- Soit $C : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
- Soit f_p la fonction définie sur I par $f_p(t) = C(t)e^{-at}$. f_p est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables, et

$$\forall t \in I, f_p'(t) = C'(t)e^{-at} + C(t)(-ae^{-at}).$$

- Alors :

$$\begin{aligned}
f_p \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in I, f_p'(t) + af_p(t) = b(t) && \text{On remplace} \\
&\iff \forall t \in I, [C'(t)e^{-at} - aC(t)e^{-at}] + aC(t)e^{-at} = b(t) && \text{On calcule} \\
&\iff \forall t \in I, C'(t)e^{-at} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, C'(t) = b(t)e^{at} && \text{car } \forall t \in I, e^{-at} \neq 0 \\
&\iff C \text{ est une primitive de } t \mapsto b(t)e^{at} \text{ sur I}
\end{aligned}$$

(iii) On détermine une primitive F de $t \mapsto b(t)e^{at}$ sur I et on conclut que $t \mapsto F(t)e^{-at}$ est une solution de (E) sur I.

On retiendra donc : **La méthode de variation de la constante ramène la recherche d'une solution particulière d'une EDLO1CC à la recherche d'une primitive d'une fonction.**

Remarque. Pas de raccourcis pour la variation de la constante : lorsque vous appliquez la méthode, vous devez reprendre la démarche à chaque fois.

Exemple 19. Résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y' + 2y = e^t.$$

Exercice 20. Résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$y' + 2y = \ln(t)e^{-2t}$$

On a au passage démontré :

Proposition 21. *Toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants admet au moins une solution.*

Démonstration. On peut toujours appliquer la méthode de variation de la constante pour obtenir une solution, car avec les notations ci-dessus, la fonction $t \mapsto b(t)e^{at}$ est continue sur I donc admet une primitive sur I. $\square$

Exercice 22. (Hors programme, facultatif) A l'aide d'une intégrale fonction de sa borne, exprimer l'ensemble des solutions de $y' + ay = b(t)$.

3. Résolution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(E) : y' + ay = b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants définie sur un intervalle I.

On considère un point $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Résoudre le problème de Cauchy $\mathcal{C}$ suivant :

$$\mathcal{C}\begin{cases}(E) : y' + ay = b(t) \\ y(x_0) = y_0\end{cases},$$

c'est déterminer l'ensemble des solutions y de (E) sur I telles que $y(x_0) = y_0$.

Méthode

Pour résoudre le problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$\mathcal{C}\begin{cases}(E) : y' + ay = b(t) \\ y(x_0) = y_0\end{cases}:$$

(i) On résout l'équation différentielle (E),

(ii) L'ensemble des solutions de (E) est paramétré par une constante réelle : on utilise $y(x_0) = y_0$ pour déterminer la valeur de C convenable.

Exemple 23. Résoudre le problème de Cauchy défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases}(E) : y' + 2y = t \\ y(2) = 3\end{cases}.$$

On cherchera une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 1.

On peut démontrer :

Proposition 24. *Un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 à coefficients constants admet exactement une solution.*

Démonstration. A noter : encore une fois, on se ramène au cas homogène ! □

III. Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Méthode générale pour les EDLO2CC

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) : y'' + ay' + by = c(t)$$

définie sur un intervalle I (où a et b sont donc des réels, et $c : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I), on s'appuie encore sur le principe de superposition.

Soit $(E_h) : y'' + ay' + by = 0$ l'équation différentielle différentielle homogène associée à (E). Soit f_p une solution (dite "particulière") de (E). Alors, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathrm{Sol}(E) = \{f_p + f_h, f_h \in \mathrm{Sol}(E_h)\}.$$

Notre résolution suit encore les étapes suivantes :

(i) Résolution de l'équation homogène (E_h) associée à (E),

(ii) recherche d'une solution particulière f_p de (E),

(iii) conclusion à l'aide du principe de superposition sous la forme ci-dessus.

Exemple 25. Pour résoudre $(E) : y'' - 3y' + 2y = t$ sur $\mathbb{R}$:

(i) On résout $(E_h) : y'' - 3y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$. On sera capable de le faire dans ce cas : les solutions sont toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t}$$

pour λ et μ des constantes réelles.

(ii) On cherche une solution particulière de (E). Ici, on la cherche sous la forme d'un polynôme de degré 1. Une solution particulière de (E) est la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = \dots$$

(iii) On conclut : l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathrm{Sol}(E) = \dots$$

1. Résolution de l'équation homogène associée

Contrairement au cas des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants, nous n'apprendrons pas à résoudre toutes les équations homogènes associées dans le cas de l'ordre 2. Comme pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on passera par une *équation caractéristique.*

Proposition 26. (et définition) *Soit $(E_h) : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.*
Pour tout réel α, il est équivalent de dire :

(i) $t \mapsto e^{\alpha t}$ est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$, et

(ii) α est solution de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$).

L'équation polynomiale $x^2+ax+b = 0$ est appelée équation caractéristique *de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants (E_h).*

Démonstration. À noter. □

Quand on sait résoudre l'équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 2, on peut trouver ses solutions.

Proposition 27. *Soit (E_h) une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants définie sur un intervalle I. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E_h). Alors :*

(i) **1e cas : si $\Delta > 0$.** *Soient α et β les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique de (E_h). Alors, les solutions de (E_h) sur I sont les fonctions de la forme :*

$$t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t},$$

pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) **2e cas : si $\Delta = 0$.** *Soit α l'unique solution réelle de l'équation caractéristique de (E_h). Alors, les solutions de (E_h) sur I sont les fonctions de la forme :*

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{\alpha t},$$

pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) **3e cas : si $\Delta < 0$,** *la méthode n'est pas au programme (utilisation des nombres complexes et des fonctions trigonométriques).*

Remarque. Cet énoncé est valable sur tout intervalle I, même si une telle équation est, par défaut, définie sur $\mathbb{R}$. En particulier, au domaine de définition près des solutions, la résolution d'une EDLHCC02 ne dépend pas de l'intervalle de définition de celle-ci.

Démonstration. Partie à noter. Reste : Voir 2A (un peu longue, mais tout à fait accessible). □

Exemple 28. Résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Exemple 29. Résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y'' - y = 0$.

Exemple 30. Que dire de l'équation différentielle $y'' + y = 0$?

2. Recherche d'une solution particulière

Pour résoudre une EDLO2CC (E), on commence donc par résoudre son équation différentielle homogène associée (E_h), après quoi il reste à déterminer *une* solution ("dite particulière") de (E) pour conclure.

Il n'y a pas de méthode générale pour le faire au programme, sauf quand le second membre est constant. À la place, on apprends à chercher une solution "sous une forme particulière".

a) Cas d'un second membre constant (à savoir faire en autonomie).

Méthode

Soient a, b, c des réels. Pour déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$:

(*i*) Si $b \neq 0$, on cherche une solution constante.

(*ii*) Si $b = 0$ et $a \neq 0$, on cherche une solution sous la forme d'un polynôme de degré 1.

(*iii*) Si $a = b = 0$, l'équation différentielle considérée est $y'' = c$, et $f_p : t \mapsto \frac{c}{2}t^2$ est solution.

Exemple 31. Déterminer une solution de (E) : $y'' - 2y' - 3y = 2$ sur $\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exemple 32. Déterminer une solution de $y'' + 2y = 4$.

Exemple 33. Déterminer une solution de $y'' - 2y' = 1$.

b) Quelques exemples de recherche d'une solution

Un premier cas classique : si le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{ct}$ où P est un polynôme et c un réel, on cherchera une solution de la même forme.

Exemple 34. (*i*) Déterminer une solution de $(E) : y'' + 2y' + y = e^t$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto Ce^t$, pour un certain réel C.

(*ii*) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exemple 35. (*i*) Déterminer une solution de $(E) : y'' + 2y' + y = 2te^t$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto P(t)e^t$, où P est un polynôme réel de degré 1.

(*ii*) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Dans certains cas (si c est solution de l'équation caractéristique...), on doit faire grimper le degré du "polynôme candidat". Dans ces exemples, $c = 2$ est racine simple de cette équation polynômiale.

Exemple 36. (*i*) Déterminer une solution de $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2te^{2t}$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto P(t)e^t$, où P est un polynôme réel de degré 2.

(*ii*) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Dans cet exemple, $c = 1$ est racine double, on doit faire grimper le degré de 2.

Exemple 37. Déterminer une solution de $(E) : y'' - 2y' + y = 2e^t$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto P(t)e^t$, où P est un polynôme réel de degré 2.

En particulier (cas $c = 0$), si le second membre $t \mapsto c(t)$ est un polynôme, on cherche une solution de $y'' + ay' + by = c(t)$ sous la forme d'un polynôme P...

(*i*) ...de même degré que c si $b \neq 0$,

(*ii*) ...de degré $deg(c) + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$.

(*iii*) Si $a = b = 0$, la résolution est immédiate (on intègre deux fois c pour résoudre $y'' = c(t)$).

Exemple 38. Résoudre $y'' - 2y' - y = 2t + 1$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1.

c) Problèmes de Cauchy linéaires d'ordre 2

Soit $(E) : y'' + ay' + by = c(t)$ une EDLO2CC sur un intervalle I, soit $t_0 \in I$ et y_0, y_1 deux réel.

Quand on recherche les solutions f de (E) sur I qui vérifient de plus :

$$\begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_1 \end{cases},$$

on dit qu'on résout le problème de Cauchy sur I donné par :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}.$$

Comme pour l'ordre 1, pour résoudre un tel problème de Cauchy, on commence par résoudre (E) : les solutions sont alors paramétrées par deux constantes réelles. On détermine dans un second temps les valeurs convenables des constantes permettant d'avoir les *conditions de Cauchy* vérifiées :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Exemple 39. Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (E) : y'' + 2y' + y = 2te^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

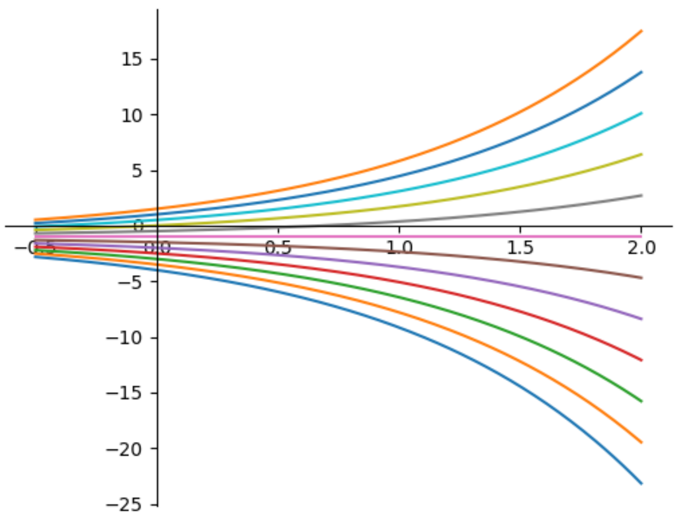
IV. Compléments

1. Notion de trajectoire, trajectoire d'équilibre

Le tracé des solutions d'une équation différentielle peut bien rendre compte de propriétés qualitatives de ces solutions.

Définition 40. Soit (E) une équation différentielle définie sur un intervalle I. On appelle *trajectoire* de (E) le graphe de toute solution de (E) sur I.
On dit qu'une trajectoire est une *trajectoire d'équilibre* si c'est le graphe d'une fonction constante. Les constantes donnant des trajectoires d'équilibre de (E) sont appelées les valeurs d'équilibre de (E).

Exemple 41. Les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t - 1$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. La seule solution constante est dont $t \mapsto -1$, cette équation différentielle n'a qu'une trajectoire d'équilibre. Voici une représentation de quelques trajectoires de cette équation différentielle, avec notamment la trajectoire d'équilibre.



On peut remarquer que les trajectoires ne se coupent pas, et que leurs limites finies (en $-\infty$ ici) existantes sont égales à la valeur d'équilibre. On dit que les trajectoires convergentes convergent vers une valeur d'équilibre :

Définition 42. Soit (E) une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$, et f une solution de (E). On dit que la trajectoire $\Gamma_f = \{(t, f(t)), t \in I\}$ de (E) converge (en $+\infty$) si la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.

Remarque. Extrait du programme officiel : "on remarquera sur des exemples que si une trajectoire converge, alors elle converge vers un équilibre"

Exercice 43. On considère l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par $y'' - 2y' + y' = 2$.

(i) Résoudre (E). Quelles sont les valeurs d'équilibre de (E)?

(ii) Montrer que toute trajectoire converge vers une valeur d'équilibre.

(iii) Écrire un code `Python` permettant de tracer quelques trajectoires de (E) dont les trajectoires d'équilibre.

2. Un changement de fonctions : résolution de l'équation logistique

Pour résoudre des équations différentielles compliquées, on peut parfois se ramener à une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 en procédans à un *changement de fonction inconnue.*

Exemple 44. Résolution de l'équation logistique

Soient a et b deux réels positifs. On souhaite résoudre l'équation différentielle (non linéaire) (L) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(L) : y' = ay(1 - by).$$

(i) Montrer que la fonction nulle est solution de (L). On admet dans la suite que les solutions non nulles de (L) ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ (faisable, un peu subtil).

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable ne s'annulant pas. On pose, pour tout réel t, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est dérivable, et donner une équation différentielle linéaire (E) sur $\mathbb{R}$ telle que :

f est solution de (L) ssi g est solution de (E).

(iii) Résoudre l'équation différentielle (E).

(iv) En déduire les solutions de (L)

D'autres exemples seront traités en TD.