Programme de colle n^o 29 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Semaine du lundi ***3 juin****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Généralités sur les équations différentielles linéaires

29.1 Introduction : exposition rapide de deux modèles de dynamique des population.

29.2 Notion d'équation différentielle linéaire : définition et vocabulaire (ordre, solution, résolution, coefficients, second membre, équation différentielle linéaire homogène, équations différentielles linéaires à coefficients constants). Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

29.3 Principe de superposition pour les équations différentielles linéaires. Utilisation du principe de superposition en considérant l'équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

29.4 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n sur un intervalle I : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$. Traduction (toute solution d'une telle équation est de classe $\mathcal{C}^n$, la fonction nulle est solution de toute équation linéaire homogène, toute combinaison linéaire de solutions d'une telle équation est solution).

Pas de question théorique portant sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

29.5 Méthode de résolution générale (résolution de l'équation homogène associée, détermination d'une solution "particulière", conclusion par superposition), exemples.

29.6 Résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants.

29.7 Recherche d'une solution particulière : recherche guidée, méthode de variation de la constante. Corollaire de la méthode de variation de la constante : tout EDLO1CC admet au moins une solution.

Les élèves doivent, en autonomie, proposer une recherche de solution sous la forme polynomiale lorsque le second membre est polynomial.

29.8 Problème de Cauchy linéaire O1CC. Tout tel problème de Cauchy admet une unique solution.

Équations différentielles linéaires d'ordre 21 à coefficients constants

29.9 Méthode de résolution générale (résolution de l'équation homogène associée, détermination d'une solution "particulière", conclusion par superposition), exemples.

29.10 Équation caractéristique d'une EDLH02CC : $t \mapsto e^{\alpha t}$ est solution d'une telle équation différentielle ssi α est solution de son équation caractéristique. Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, dans le cas où le discriminant de son équation caractéristique est positif ou nul.

29.11 Recherche d'une solution particulière : cas d'un second membre constant (à savoir faire en autonomie - tous les autres cas doivent être guidés). Cas d'un second membre de la forme $t \mapsto P(t)$ ou $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$, où P est un polynôme (la forme particulière à considérer à été donnée en cours).

29.12 Problème de Cauchy linéaire O2CC. Forme particulière des *conditions de Cauchy.*

Compléments (non HP)

29.13 Notion de trajectoire, de trajectoire d'équilibre. Trajectoires convergentes.

29.14 Résolution de l'équation logistique par changement de fonction inconnue.

Les élèves doivent pouvoir suivre un changement de fonction lorsqu'il est indiqué.

Quelques questions de cours

1. Décrire, en utilisant tout le vocabulaire de la première partie, les 5 équations différentielles suivantes (au choix du colleur - une doit être facile à résoudre avec le cours). Pour chaque équation différentielle linéaire donnée, l'élève identifiera en particulier un intervalle de définition convenable, les coefficients et le second membre. L'élève donnera une solution de l'une d'elles.
2. Énoncer le principe de superposition. Exposer, avec démonstration, l'utilisation systématique qui en est faite utilisant l'équation homogène associée à une EDLO1CC *(élèves : il faut donner la proposition 13 et reproduire la démonstration de la proposition 9, en prenant $(E_1) = (E)$ et $(E_2) = (E_h)$, pour la démontrer).*
3. Énoncer et démontrer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.
4. Énoncer et démontrer le théorème de résolution des EDLO1CC homogènes. L'appliquer sur un exemple, au choix du colleur.
5. Appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution de $y' + 2y = e^t$.
6. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 3y = 2t \\ y(2) = 3 \end{cases}$.
7. Énoncer le théorème de résolution des EDLO2CC homogènes. Montrer que les solutions données par le théorème sont bien solutions.
8. Résoudre $y'' + 2y' - 2y = 3$ (variante similaire au choix du colleur).
9. Déterminer une solution de $y'' - 3y' + 2y = 2te^{2t}$ sous la forme $t \mapsto P(t)e^{2t}$, où P est un polynôme de degré 2 (variante similaire au choix du colleur).
10. Définir la notion de problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.
11. Donner l'équation logistique (L). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas. On pose $g = \dfrac{1}{f}$. Donner une équation différentielle linéaire (E) telle que :
    f est solution de (L) si et seulement si g est solution de (E).
    (La fin de la résolution de (L) n'est pas exigible).