Programme de colle n^o 30 : Équations différentielles, algèbre linéaire et début des applications linéaires.

*Semaine du lundi **9 juin**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Équations différentielles : Chapitre complet

Se reporter au programme précédent

Révision du chapitre 17 (espaces vectoriels)

4h de cours de cette semaine ont été consacrées à ces révisions, et à la présentation des espaces vectoriels "de référence" : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Tout exercice faisant intervenir la notion de dimension infinie est hors programme (sauf éventuellement, en dernière question d'ouverture).

Tout exercice considérant l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ doit être très guidé (des exemples ont été donnés, mais pas de calculs faits en classe). On pourra éventuellement faire démontrer un résultat d'analyse et en demander une interprétation avec le vocabulaire des espaces vectoriels.

Applications linéaires

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

30.1 Applications linéaires : définition et caractérisation. Image du vecteur nul par une application linéaire. Compatibilité avec les combinaisons linéaires de $n \geq 2$ vecteurs.

30.2 Application linéaires et bases : deux applications linéaires entre les mêmes espaces vectoriels qui coïncident sur une base de l'espace vectoriel de départ sont égales. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de l'espace vectoriel E et si $v_1,\dots,v_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel F, alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], f(e_i) = v_i.$$

Exemple fondamental dans le cas $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Python (interrogation systématique)

30.3 Simulation d'expériences aléatoires et de variables aléatoires.

Quelques questions de cours

1. Pour les equations différentielles, se reporter au programme précédent.
2. Définir la notion d'application linéaire. Énoncer et démontrer la caractérisation des applications linéaires.
3. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $f(0_E) = 0_F$. Montrer aussi que f est "compatible avec les combinaisons linéaires" de plus de 2 vecteurs (prop. 7 (ii)).
4. Démontrer que $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de base finie.
5. Montrer que $(X-1, X^2-X, X^2+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice des coordonnées de $1+X$ dans cette base.
6. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+x, x+z) \end{array}\right.$ (toute variante similaire possible). Montrer que f est linéaire. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, où $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}$) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$).
7. Énoncer la proposition (9) caractérisant l'existence d'une application linéaire donnée par les images des vecteurs d'une base. Démontrer l'unicité (démo. 8).
8. Énoncer la proposition (9) caractérisant l'existence d'une application linéaire donnée par les images des vecteurs d'une base. Démontrer l'existence (démo. 9).
9. Écrire une fonction Python permettant de simuler l'expérience aléatoire consistant à lancer 2 dés équilibrés à 6 faces et à noter en résultat le maximum des faces obtenues. Puis, écrire un code permettant de simuler 1000 tirages, et de calculer une estimation de l'espérance de la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience.