Chapitre 24 : Variables aléatoires à densité

ECG1 A, Lycée Hoche

Ce cours est une introduction aux variables aléatoires à densité, qui forment avec les variables aléatoires discrètes les deux grandes familles de variables aléatoires au programme d'ECG. Ces variables aléatoires à densité font intervenir des objets comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

et nécessitent donc de commencer par des compléments sur les intégrales impropres.

I. Intégrales impropres en $-\infty$ et $+\infty$

L'idée est simple. Sous réserve d'existence, $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique sous la courbe de f entre a et $+\infty$. Celle-ci n'existe pas toujours.

Exemple 1. Dessins à noter.

1. Généralités.

Définition 2. Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$.

(*i*) Si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, on dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *converge*. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(*ii*) Sinon, on dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *diverge*. Et on ne donne aucune valeur à $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Dans tous les cas, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

On fait la même chose en $-\infty$.

Définition 3. Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $]-\infty, a]$.

(i) Si $\displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to -\infty$, on dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ *converge.* Dans ce cas, on pose :

$$\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$$

(ii) Sinon, on dit que *l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ *diverge.* Et on ne donne aucune valeur à $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$.

Dans tous les cas, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $-\infty$.

Remarque. Vous ne devez donc pas calculer avec une intégrale impropre avant d'avoir montré sa convergence, ce qui se ramène à l'étude de la limite de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Remarque. Étudier la nature d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Exemple 4. Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes, et donner la valeur de celles qui convergent.

(i) $\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$.

(ii) $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$.

(iii) $\int_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

(iv) $\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.

Nous avons les intégrales impropres dites "de référence" suivante :

Proposition 5. *Soit α un réel. Alors :*

(i) Pour tout réel $a > 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^\alpha \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Autrement dit, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) Pour tout réel $a < 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a t^\alpha \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Autrement dit, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(iii) Pour tout réel a, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

(iv) Pour tout réel a, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Dans chacun des cas convergents ci-dessus, on a été capable de calculer la valeur de cette intégrale impropre. Il faut impérativement savoir refaire ce calcul en un temps record, si cette valeur est requise dans un exercice. En particulier :

$$\text{Si } \alpha > 1 : \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

$$\text{Si } \alpha > 0 : \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

Remarque. Pour l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^\alpha \mathrm{d}t$, a est supposé strictement positif, car la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est n'est à priori définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut considérer de telles intégrales impropres en $-\infty$ et un calcul simple montre qu'elles divergent.

Exemple 6. Méthode : Pour étudier une intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, on peut à priori procéder en deux étapes :

- Étudier l'intégrale $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geq a$, en la calculant par exemple, puis,
- Faire tendre x vers $+\infty$ pour conclure sur la nature et l'éventuelle valeur de $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Avec cette démarche, toutes les techniques classiques de l'intégration peuvent être utilisées dans la première étape. Exemple :

(i) Déterminer la nature et l'éventuelle valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\mathrm{d}t$ (intégration à vue).

(ii) Déterminer la nature et l'éventuelle valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par partie.

(iii) Déterminer la nature et l'éventuelle valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = e^t$.

Enfin, on a cette nouvelle version de la relation de Chasles qui, en plus de donner une égalité dans le cas convergent, montre que la convergence d'une intégrale impropre ne dépend pas de la "borne finie" considérée (tant qu'elle est licite):

Proposition 7. *Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$. Soit $b \in [a, +\infty[$. Alors, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas,*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

On a bien sûr un énoncé similaire en $-\infty$.

Démonstration. À noter. $\square$

2. Intégrales doublement impropres

Pour travailler avec des objets comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, il faut vérifier *séparément* les convergences en $-\infty$ et $+\infty$.

Définition 8. *(et proposition)* Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(*i*) On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge en $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Cette convergence ne dépend pas du réel a considéré.

(*ii*) On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge en $-\infty$ s'il existe un réel a tel que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Cette convergence ne dépend pas du réel a considéré.

(*iii*) On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si elle converge en $-\infty$ et en $+\infty$.

On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale doublement impropre. Si celle-ci converge, alors on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

où a est un réel, et cette définition ne dépend pas du choix du réel a.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Étudier la nature d'une intégrale (ici, doublement) impropre, c'est déterminer si elle converge.

Remarque. Le fait qu'on puisse choisir le réel a rend l'énoncé plus conséquent, mais vous simplifie la vie. Pour étudier une intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, vous pouvez par exemple systématiquement vous ramener à l'étude de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ et, en cas de convergence, vous avez :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 9. Méthode : Pour étudier une intégrale doublement impropre, on doit donc systématiquement étudier séparément les deux intégrales impropres en $-\infty$ et $+\infty$.

(*i*) Déterminons la nature et l'éventuelle valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(*ii*) Déterminons la nature et l'éventuelle valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t\mathrm{d}t$.

(*iii*) Déterminons la nature et l'éventuelle valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Remarque. Si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, alors la définition donne immédiatement la relation de Chasles suivante : pour tous réels a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

Vous pouvez donc retenir que : **sous réserve de convergence des intégrales écrites**, toutes les relations de Chasles qu'on peut vouloir écrire sont vraies. Utiliser la relation de Chasles sur des intégrales impropres avant d'avoir montré leurs convergences est une faute grave.

3. Techniques classiques de calcul d'intégrales impropres

Comme dit plus haut, pour mettre en œuvre changements de variable, intégrations par parties ou intégration à vue, on le fait au niveau de l'intégrale sur un segment considérée avant de passer à la limite.

Pour les intégrales doublement impropres, on peut gagner en efficacité de la manière suivante :

Exemple 10. Étudions la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par partie.

4. Propriétés élémentaires des intégrales impropres

Attention

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les énoncés sont donnés pour les intégrales impropres en $+\infty$ mais se transposent tel quel pour les intégrales impropres en $-\infty$, ou les intégrales doublement impropres.

Tout d'abord, comme souvent, un énoncé de linéarité.

Proposition 11. *Soit a un réel, et f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$.*
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors pour tous réels λ et μ, $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f+\mu g)(t)\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f+\mu g)(t)\mathrm{d}t = \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + \mu\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Attention, pour utiliser la linéarité, il faut bien vérifier que les "bonnes" intégrales convergent. On peut facilement fournir un contre exemple montrant qu'en ne vérifiant que la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lambda f(t)+\mu g(t)\mathrm{d}t$, on ne peux pas conclure.

Par exemple, pour $f(t)=t$ et $g(t)=-t$, on a (pour tout réel t) $f(t)+g(t)=0$, donc $\int_0^{+\infty}(f+g)(t)\mathrm{d}t$ converge, mais **l'égalité c-dessous est fausse** :

$$\int_a^{+\infty} (f+g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$

car les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} t\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} -t\mathrm{d}t$ divergent (donc le membre de droite n'est pas défini).

Ensuite, les énoncés de positivité et de croissance de l'intégrale restent vraies pour les intégrales impropres. Pour la positivité :

Proposition 12. *Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

(i) Si : $\forall t\in[a,+\infty[, f(t)\geq 0$, alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\geq 0$.

(ii) Si : $\forall t\in[a,+\infty[, f(t)\geq 0$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=0$, alors $\forall t\in[a,+\infty[, f(t)=0$.

(iii) Si : $\forall t\in[a,+\infty[, f(t)>0$, alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t>0$.

Remarque. L'énoncé (i) est appelé la positivité de l'intégrale. L'énoncé (iii) est appelé la stricte positivité de l'intégrale (impropre ici).

Démonstration. À noter. □

Ces énoncés, et les techniques vues dans la démonstration, sont à la base de la partie suivante (intégrales impropres et fonctions positives). Mais avant ça, une conséquence : la *croissance* de l'intégrale.

Proposition 13. *Soit a un réel, et f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$. Supposons les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ convergentes.*

(i) Si : $\forall t \in [a,+\infty[, f(t) \leq g(t)$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.

(ii) Si : $\forall t \in [a,+\infty[, f(t) < g(t)$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t < \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. L'énoncé (i) est la propriété de croissance de l'intégrale, l'énoncé (ii) est la propriété de stricte croissance de l'intégrale (impropre ici).

5. Intégrales impropres et fonctions positives

Le développement de la suite de ce cours sur les intégrales impropres est très proche de celui sur les séries à termes positives.

Tout part du lemme suivant, déjà vu dans le cours sur les intégrales.

Proposition 14. *Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$.*

Si f est une fonction (resp. strictement) positive, alors la fonction $F : \left|\begin{array}{lcl} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$

est (resp. strictement) croissante.

Démonstration. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable de dérivée f. Par hypothèse (cas f positive - le cas f strictement positive est analogue), F' est donc positive sur $[a,+\infty[$, donc F est croissante sur cet intervalle. $\square$

Voici les conséquences pratiques.

Proposition 15. *Soit a un réel et f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$. Alors, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$.*

Si ce n'est pas le cas, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Remarque. "la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$" se traduit par :

$$\ldots$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a,+\infty[$. D'après le théorème de la limite monotone, celle-ci admet donc une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée, et tend vers $+\infty$ sinon. Autrement dit, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$, et sinon :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$\square$

Les exercices pouvant faire appel aux deux énoncés précédents sont assez théoriques. Par contre, ces énoncés permettent de démontrer l'énoncé suivant qui lui, vous sera fort utile.

Il s'agit d'un théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives.

Proposition 16. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Supposons :*

$$\forall t \in [a, +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors :

(i) Si $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et :

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$

(ii) Si $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. Dans cet énoncé, les fonctions f et g sont donc positives sur l'intervalle considéré.

Remarque. Cet énoncé sert à montrer des convergences ou des divergences d'intégrales (l'inégalité du (i) est déjà démontrée, par croissance de l'intégrale : ce qui compte est la convergence dans ce cas).

Démonstration. À noter. □

Exemple 17. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exemple 18. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t}\mathrm{d}t$?

6. intégrales impropres absolument convergentes

Si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, alors $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est continue comme composée de f, continue sur $[a, +\infty[$, par la fonction valeur absolue, continue sur $\mathbb{R}$. La définition suivante est donc légitime.

Définition 19. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Comme pour les séries :

Proposition 20. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.*

Démonstration. À noter. □

Pour finir cette partie, on a l'inégalité triangulaire.

Proposition 21. *Avec les notation précédentes, si $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et on a l'inégalité triangulaire :*

$$|\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$$

Démonstration. À noter. □

II. Intégrales impropres en un point

On peut également s'interroger sur la bonne définition de quantités comme $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exemple 22. Dessins à noter.

1. Généralités

Définition 23. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

(i) Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

converge (en b) si la limite $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Sinon, on dit que cette intégrale impropre diverge.

(ii) Soit f une fonction définie et continue sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

converge (en a) si la limite $\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Sinon, on dit que cette intégrale impropre diverge.

Étudier la nature d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Remarque. Si f est continue sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ continue de désigner l'intégrale de f, continue, sur le segment $[a, b]$, et cela ne créé par de conflit de notations comme on va le voir dans la sous partie suivante.

Exemple 24. Étudions la nature des intégrales impropres suivantes.

(i) $\int_0^1 t\mathrm{d}t$.

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

(iii) $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

(iv) $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$.

(v) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{t\ln(-t)}\mathrm{d}t$.

2. Intégrales faussement impropres en un point

Définition 25. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

(i) Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b[$. Si f admet un prolongement par continuité à gauche en b, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (en b). Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre en b. Enfin, si on note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f à gauche en b, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$$

(où $\tilde{f}$ est maintenant continue sur $[a, b]$).

(ii) La même définition est valable, mutatis mutandis, pour les intégrales impropres en a de la forme $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque. Si f est continue sur $[a, b]$, alors elle est en particulier continue sur $[a, b[$ et sa restriction à $[a, b[$ étant prolongeable par continuité en b (à gauche ici), les deux sens qu'on pouvait donner à $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ sont les mêmes (comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, ou comme intégrale faussement impropre en b). Même remarque en a.

Exemple 26. Que dire de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t}\mathrm{d}t$?

3. Généralisation des résultats de la première partie

Voici la version "impropreté en un point" des résultats de la partie précédente.

Proposition 27. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b[$.*

(i) Soit $a' \in [a, b[$. Alors, l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (en b) si et seulement si $\int_{a'}^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (en b), et dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a'} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a'}^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(ii) Les propriétés de linéarité, de positivité et de croissance des intégrales impropres (en $\pm\infty$) sont aussi vraies pour les intégrales impropres en un point.

(iii) On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument (en b) si $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge (en b). Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.

Mutatis mutandis, les mêmes propositions sont vraies pour les intégrales impropres en a.

4. Intégrales doublement impropres : cas général

Dans la suite, on adopte les conventions suivantes :

- Pour tout réel a, $-\infty < a < +\infty$ (idem avec des inégalités larges).
- En particulier, $-\infty < +\infty$ (idem avec des inégalités larges).

Définition 28. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, ++\infty\}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.
On dit que l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge s'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Les deux points précédents (nature et valeur) ne dépendent pas du point $c \in]a, b[$ choisi.
Dans tous les cas, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale doublement impropre, en a et en b.

Exemple 29. Les mêmes morales et techniques que celles de la première partie sont valable pour ce cas le plus général.

(i) Préciser ce que désigne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}$ et déterminer sa nature.

(ii) Que dire de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$?

(iii) Étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$.

(iv) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, à l'aide d'un encadrement.

III. Variable aléatoires à densité

Toutes les variables aléatoires réelles introduites sont définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ quelconque. Tous les résultats de ce cours introductif sont admis.

1. Compléments sur les fonctions continues par morceaux

On considérera des fonctions qui ne sont pas continues, mais continues par morceaux.

Définition 30. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est *continue par morceaux* sur I s'il existe des points $x_1, \ldots, x_n$ de I (notés tels que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$) tels que :

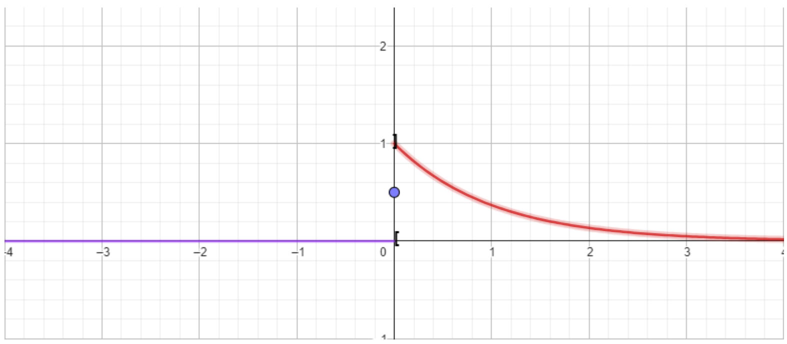
- (i) f est continue sur $I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, et
- (ii) f est prolongeable par continuité à gauche et à droite en chacun des x_i, $1 \leq i \leq n$.

Autrement dit, f est continue par morceaux sur I s'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$ de I tels qu'en posant $x_0 = \inf(I)$, et $x_{n+1} = \sup(I)$, f est prolongeable en une fonction continue sur chacun des intervalles $]x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ et $[x_n, x_{n+1}[$.

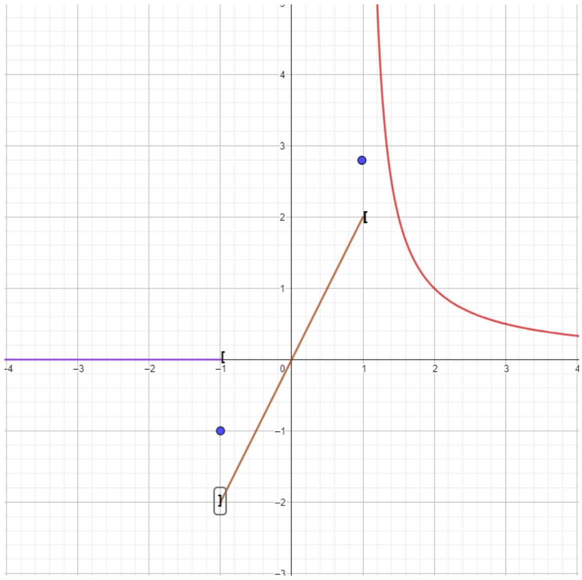
Remarque. Plus précisément, avec les notations ci-dessus, c'est la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ qui doit être prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$, pour tout i convenable.

Exemple 31. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue par morceaux.

En effet, celle-ci est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_-$ en posant $f(0) = 0$, et est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = e^{-0} = 1$.



Exemple 32. La fonction représentée ci-dessous n'est pas continue par morceaux. Elle est bien continue sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, et $]1, +\infty[$ (donc le premier point est vérifié), mais ne se prolonge pas par continuité à droite en 1 (elle admet $+\infty$ comme limite à droite en 1).



Il s'agit de la fonction donnée par :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ -1 \text{ si } x = -1 \\ 2x \text{ si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{14}{5} \text{ si } x = -1 \\ \dfrac{1}{x-1} \text{ si } x > -1 \end{cases}$$

Exemple 33. Méthode : Pour déterminer si une fonction donnée par une formule avec des conditions est continue par morceaux...

- On vérifie si chaque "sous formule" donnée sur un intervalle définit bien une fonction continue sur cet intervalle, puis
- On étudie les limites à droite et à gauche de la fonction en chaque point "de rupture". Si chacune des limites étudiées existe et est finie, on peut conclure que la fonction est continue par morceaux.

On remarquera que la valeur prise par cette fonction en ces "points de rupture" n'a aucune importance pour étudier sa continuité par morceaux (on ne regarde que les limites à droite et à gauche). Étudions les deux cas suivants :

(i) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

(ii) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} \ln(x^2) \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2 + x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Remarque. Cette notion de "points de rupture" est **informelle** et ne doit pas être utilisée sur une copie.

On peut intégrer des fonctions par morceaux comme si elles étaient continues.

Définition 34. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ des points de $\mathbb{R}$ tels que f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, et f est prolongeable par continuité à gauche et à droite en chacun des $x_i, 1 \leq i \leq n$. Soit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, g_i le prolongement par continuité de $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, pour $1 \leq i \leq n$. Alors,

(*i*) Si a et b sont deux points de $[x_i, x_{i+1}]$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g_i(t)\mathrm{d}t$.

(*ii*) Si a et b sont deux réels tels que pour certains i et j, on ait :

$$x_i \leq a < x_{i+1} < x_{i+2} \ldots < x_j < b \leq x_{j+1}$$

alors on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(t)\mathrm{d}t + \ldots + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_j}^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(*iii*) On étend de la même manière cette définition pour les intégrales impropres $\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque. Cela veut juste dire que si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut définir et calculer des intégrales d'intégrande f en les découpant sur les intervalles de continuité de f.

Par exemple, pour la fonction f donnée sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$, qui est continue par morceaux, on aura avant toute réflexion :

$$\int_{-2}^3 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^0 e^{-\dfrac{1}{x^2}} dx + \int_0^3 0 dx$$

où $x \mapsto e^{-\dfrac{1}{x^2}}$ est prolongée par continuité en 0 dans la première intégrale (par la valeur 0).

Exemple 35. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ où pour tout réel t,

$$g(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

2. Rappels et compléments sur les fonctions de répartitions

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction notée F_X et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Les résultats suivants ont déjà été abordés :

Proposition 36. *Avec les notations ci-dessus :*

(*i*) $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$,

(*ii*) F_X *est croissante sur* $\mathbb{R}$,

(*iii*) $F_X \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ *et* $F_X \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$,

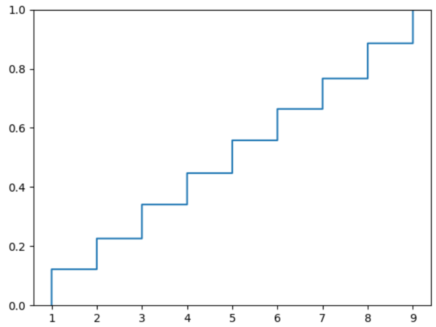
(*iv*) F_X *est continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$,

(*v*) F_X *admet une limite finie à gauche en tout point de* $\mathbb{R}$, *et pour tout réel* a *:*

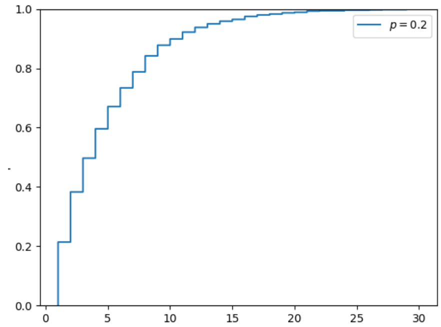
$$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < x).$$

De plus, on a vu que la connaissance de F_X permettait de retrouver la loi de X.

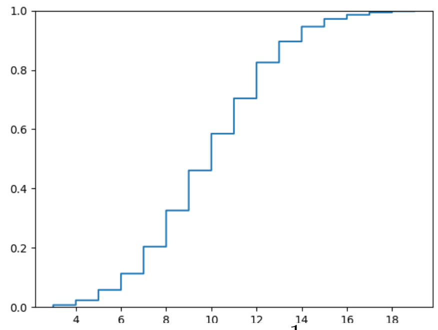
Voici quelques fonctions de répartitions de variables aléatoires discrètes.



Loi $\mathcal{U}([\![1,10]\!])$.



Loi $\mathcal{G}(0,2)$.



Loi $\mathcal{B}(50, \frac{1}{5})$.

Ces graphiques réalisés avec Python font apparaitre des traits horizontaux, qu'on ne trace pas d'habitude.

On remarque que ces fonctions de répartitions d'une variable aléatoire **discrète** X ne sont pas continues. Leurs points de discontinuité sont précisément les points $x \in \mathbb{R}$, tels que $\mathbb{P}(X = x)$ soit non nul. Le "saut" effectué est alors

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t).$$

Définition 37. Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un *atome* pour la loi de X si

$$\mathbb{P}(X = x) \neq 0.$$

Si X est une variable aléatoire discrète, connaitre le comportement de X revient, d'après l'une des morale du chapitre sur les VA discrètes, à connaitre sa loi, donc à connaitre la probabilité attribuée à chacun de ses atomes. Alors, la fonction de répartition apparaît comme une donnée alternative et équivalente à la donnée de sa loi.

La situation est radicalement différente pour les variables aléatoire à densité. Voici le cas dans lequel nous serons.

Définition 38. Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que la loi de X est *sans atomes* (ou *diffuse*) si elle n'a pas d'atomes, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Pourquoi introduire cette notion?

Prenons l'exemple du temps d'attente d'un bus arrivant tous les 10 minutes, modélisé par une variable aléatoire réelle X comptant ce temps en minutes (avec décimales). On fait les hypothèses suivantes :

α) Le bus est très régulier, et passe très exactement toutes les 10 minutes.

β) Sans information sur ses horaires, on suppose n'avoir aucune information sur son dernier passage. On veut donc modéliser le problème en disant qu'il y a "autant de chances que le bus soit passé il y a 10 minutes, que 3 minutes, que 2,574 secondes...

Il faut comprendre ici que :

(i) La probabilité que le bus passe dans exactement π minutes est nulle. En effet, avoir un temps d'attente "exactement égal à π" est un événement bien trop improbable. Pour être exacte, il faudrait que l'infinité des décimales de notre chronomètre soient celles de π...

(ii) Ce raisonnement s'applique en fait à tout réel de $[0, 10]$, π n'a rien de particulier. La loi de X est **sans atomes**.

(iii) D'ailleurs, notre chronomètre n'aurait pas la précision requise pour savoir "toutes les décimales" de ce temps (qui commencent à être bien théoriques...). Par contre, on pourra facilement mesuré si le bus est passé entre la seconde 357 et la seconde 358. Ainsi, naturellement, on s'intéresse à des probabilités type $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

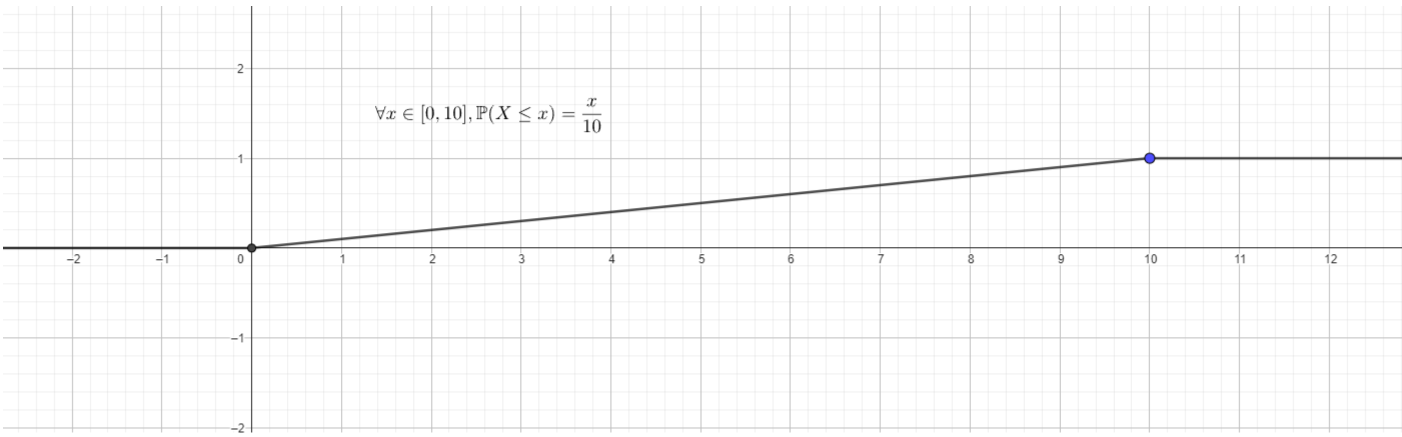
(iv) On voit alors comment modéliser le problème à l'aide du point β) ci-dessus : on voudrait avoir $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 5) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 8) = \dfrac{1}{10}$... Ce qui se généralise par :

$$\forall (a, b) \in [0, 10]^2, a \leq b \implies \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{10}.$$

Autrement dit, la probabilité de voir le bus arriver entre la minute a et la minute b est exactement la proportion occupée par $[a, b]$ dans $[0, 10]$.

On dira que X suit la loi uniforme *sur* $[0, 10]$.

Voici la fonction de répartition de cette variable aléatoire réelle.



Remarque. On retiendra bien:

(i) La continuité de cette fonction de répartition F_X traduit le caractère **sans atomes** de la loi de X.

(ii) Les variables aléatoires réelles dont la loi est sans atomes sont étudiées à travers leurs fonctions de répartition, leur loi étant la fonction nulle. La loi de probabilité est un bon outil pour les variables aléatoires **discrètes**, la fonction de répartition est le bon outil pour les variables aléatoires **à densité**.

(iii) La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète a le profil "en escalier" observé ci-dessus.

On concrétise tout ça dans l'énoncé suivant :

Proposition 39. *Soit X une variable aléatoire réelle, et x un réel. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) La fonction de répartition F_X de X est continue en x, et

(ii) $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

En particulier, F_X est continue ssi la loi de X est sans atomes.

Avant de passer à la définition des variables aléatoires à densité, on aura besoin de l'énoncé suivant, car on va maintenant couramment introduire des variables aléatoires réelles en donnant leurs fonctions de répartition.

Proposition 40. Caractérisation des fonctions de répartition *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose que :*

(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$,

(ii) F est continue à droite en tous points de $\mathbb{R}$,

(iii) F admet 0 pour limite en $-\infty$ et 1 pour limite en $+\infty$.

Alors, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Autrement dit, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle X sur cet espace, telle que $F = F_X$.

Exemple 41. et méthode : On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{20} \text{ si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 \text{ si } x > 10 \end{cases}$$

(i) Tracer l'allure de F. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.

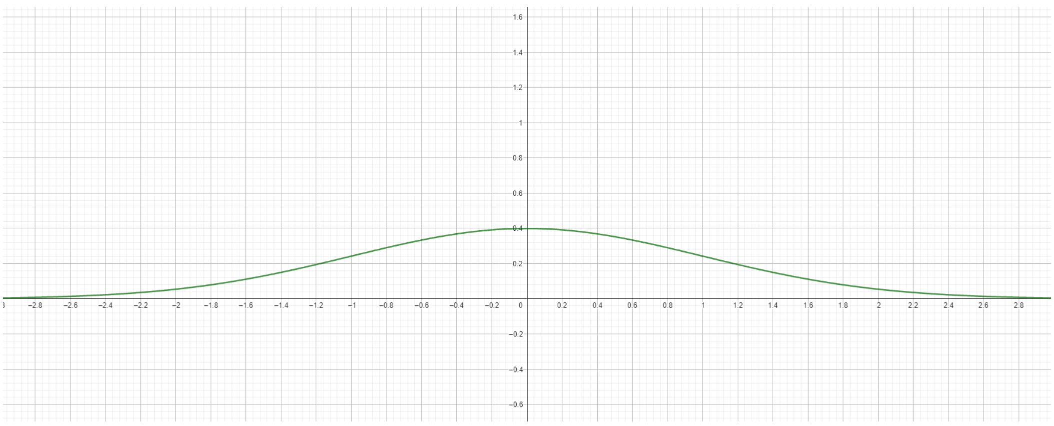
(ii) Donner les atomes de la loi de X. Imaginer un "genre" de protocole pouvant donner une loi de ce type.

Dans cet exemple, X n'est ni à densité, ni discrète (ça existe !).

3. Variable aléatoire à densité

Certaines variables aléatoire sans atomes sont appelées variables aléatoires à densité. Il s'agit des variables aléatoire réelles dont la fonction de répartition se calcule comme des intégrales de fonctions. Cette fonction "intégrande" sera naturellement continue par morceaux, et appelée densité.

Un premier exemple avec une variable aléatoire discrète X suivant la loi Gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.



On remarque que f_X est positive, et on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Voici alors le lien entre f_X et F_X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit :

(*i*) L'aire totale sous la courbe de f_X vaut 1,

(*ii*) La probabilité que X soit inférieur ou égal à x est l'aire $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$ sous la courbe de f_X jusqu'à x (partant de $-\infty$).

Cette notion est intéressante, car elle regroupe beaucoup de lois classiques, naturelles "à juste titre", et permet d'utiliser le calcul intégral pour résoudre des problèmes.

Définition 42. Soit X une variable aléatoire. On dit que X est une variable aléatoire *à densité* s'il existe une fonction continue par morceaux f_X sur $\mathbb{R}$ telle que :
Pour tout réel a, $\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\mathrm{d}t$ converge et $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\mathrm{d}t$.
On dit alors que f_X est une densité pour la variable aléatoire X.

Remarque. On dit que f_X est *une* densité de X : en effet, il existe plusieurs densités pour X lorsqu'il en existe une. La raison à cela est que f_X est continue par morceaux par définition, et "caractérisée par ses intégrales". On peut donc changer la valeur de f_X en un nombre fini de points et conserver une densité de X.

Une conséquence immédiate de Chasles :

Proposition 43. *Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et a et b deux réels tels que $a \leq b$. Alors :*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Étant donné une fonction, la proposition suivante permet de vérifier s'il existe une variable aléatoire X à densité dont cette fonction est la densité.

Proposition 44. (et définition) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

(ii) f est positive sur $\mathbb{R}$, (sauf éventuellement en un nombre fini de points)

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors, il existe une variable aléatoire X à densité (définie sur un espace probabilisé) dont f est une densité. On dit alors que f est une densité de probabilité

Remarque. Vous adopterez peut-être une définition légèrement différente l'année prochaine, mais les idées seront exactement les mêmes.

On peut adopter le point de vue "fonction de répartition", qui est équivalent. Pour cela, il faut comprendre le liens entre une fonction de densité et la fonction de répartition d'une VA à densité.

Dans un sens (fonction de répartition à partir d'une densité), on a qu'à écrire $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Pour l'autre sens, on doit penser au théorème fondamental de l'analyse ("en $-\infty$") pour comprendre le point ci-dessous : une densité s'obtient comme dérivée de la fonction de répartition, à un nombre fini de points près.

Proposition 45. *Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Alors,*

(i) La fonction de répartition F_X de X est continue sur $\mathbb{R}$,

(ii) La fonction F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

De plus, si f est une fonction continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x en lequel F_X est dérivable, sauf éventuellement en un nombre fini de points, on ait $F_X'(x) = f(x)$, alors f est une densité de X.

On peut alors caractériser les variables aléatoires à densité par leurs fonctions de répartitions.

Proposition 46. *Soit X une variable aléatoire réelle. Supposons que sa fonction de répartition F_X vérifie :*

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et

(ii) F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points.

Alors, X est une variable aléatoire à densité.

Voici pour les énoncés les plus importants de cette introduction.

Remarque. Ici, on est forcé de vous mentir un tout petit peu (où ça?) à cause d'une limitation du programme sur les calculs d'intégrales impropres, mais vous ne serez pas confronté à cela.

4. Les méthodes relatives à ces énoncés

Exemple 47. Méthode : Pour vérifier si une variable aléatoire réelle X donnée par sa fonction de répartition F_X est à densité, on utilise la proposition 46 ci-dessus. On vérifie donc si :

(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et

(ii) F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points.

avant d'appliquer les théorèmes ci-dessus.

Soit X une variable aléatoire telle que pour tout réel x, $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que X est à densité.

Exemple 48. Méthode : Pour vérifier si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, on procède en deux temps.

(i) On vérifie si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle (**quelconque**) à l'aide de la méthode vue pour la proposition 40. Si c'est le cas, on a démontré l'existence d'une variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.

(ii) On vérifie si X est à densité en se ramenant à la méthode de l'exemple 13 ci-dessus.

Montrons par exemple que la fonction F donnée sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Exemple 49. Méthode : À la suite du point précédent, pour donner une densité d'une variable aléatoire X, à densité, donnée par sa fonction de répartition F_X, on définit f_X comme la dérivée de F_X en ses points de dérivabilité, et on complète par une valeur positive au choix (0 par exemple) en les autres points.

Donnons une densité pour la variable aléatoire réelle X à densité admettant pour fonction de répartition la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple 50. Méthode : Pour vérifier si une fonction donnée est une densité pour une variable aléatoire réelle à densité, autrement dit pour vérifier si cette fonction est une *densité de probabilité*, on utilise directement la proposition 44.

Montrons par exemple que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ |x| \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases} \end{array} \right.$ est une densité de probabilité.

Exemple 51. Méthode : À la suite du point précédent, pour déterminer la fonction de répartition associée à une densité de probabilité, on se ramène à un calcul d'intégrale. Déterminons la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction f de l'exemple précédent.

IV. Panorama des notions pour la suite de ce chapitre

1. Une particularité des lois sans atomes

On rappelle que si X est une variable aléatoire réelle,

(i) On dit que la loi de X est sans atome, ou diffuse, si $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0$.

(ii) Si X est à densité, alors la loi de X est sans atomes.

Une conséquence importante pour tous les calculs avec des variables à densité :

Proposition 52. *Soit X est une variable aléatoire à densité. Alors pour tous réels a et b,*

(i)

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b),$$

(ii)

$$P(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a),$$

(iii)

$$P(X > b) = \mathbb{P}(X \geq b).$$

En effet, $[a \leq X \leq b] = [X = a] \cup [a < X \leq b]$ et cette réunion est disjointe, donc:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(x = a) + \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

car la loi de X est sans atomes. Les autres égalités se démontrent de la même manière.

2. Transformations de variables aléatoires à densité

L'idée est la suivante : on se donne une variable aléatoire à densité X, et on définit une nouvelle variable aléatoire Y de la forme $Y = g(X)$, avec g une fonction réelle. Y est-elle à densité? Peut on donner sa fonction de répartition et/ou une densité de probabilité pour Y?

Voyons un premier exemple.

Exemple 53. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $[1, 3]$ (voir plus bas). Plus précisément, X est à densité, sa fonction de répartition étant donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On pose $Y = 2X + 1$. Montrons que Y est à densité.

Idée à retenir : on passe par la fonction de répartition, et on relie F_Y à F_X.

Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y. On rappelle que pour tout réel t, par définition, $F_Y(t) = \mathbb{P}([Y \leq t])$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Y(\omega) \leq t \iff 2X(\omega) + 1 \leq t \iff X(\omega) \leq \frac{t-1}{2}$$

Ainsi, $[Y \leq t] = [X \leq \frac{t-1}{2}]$.

Par conséquent : $\boxed{F_Y(t) = F_X(\frac{t-1}{2})}$.

Pour finir de donner F_Y, il faut voir ce que donne les conditions présentes dans la définition de F_X.

Or, on a les chaines d'équivalence :

$$1 \leq \frac{t-1}{2} \leq 3 \iff 2 \leq t-1 \leq 6 \iff 3 \leq t \leq 7$$

et

$$\frac{t-1}{2} < 1 \iff t < 3$$

Finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_Y(t) = F_X(\frac{t-1}{2}) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 3 \\ \frac{1}{2}(\frac{t-1}{2} - 1) = \frac{1}{4}(t-3) \text{ si } 3 \leq x \leq 7 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On reconnait (cf plus bas) la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[3, 7]$, donc Y est à densité, et suit la loi uniforme sur $[3, 7]$.

Exemple 54. Voici un autre exemple. Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}.$$

On dira que X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $Y = 1 - X$. Montrer que Y est à densité, et donner sa fonction de répartition.

Exemple 55. Même question que dans l'exemple précédent, mais avec la variable aléatoire Y donnée par $Y = e^X - 1$.

Un dernier cas, où il faut faire plus attention : quand la "fonction g" n'est pas bijective.

Exemple 56. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$: sa fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) \text{ si } -1 \leq X \leq 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Donner la fonction de répartition de la variable Y donnée par $Y = X^2 + 1$. Y est-elle à densité?

3. Espérance, variance, moments et transfert

On retrouve les mêmes notions que pour les variables aléatoires discrètes. On pourra constater les similarités avec celles-ci, le symbole $\sum$ étant "remplacé" par $\int$.

Définition 57. Soit X une variable aléatoire à densité, et f_X une densité de X. On dit que X admet une espérance si l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) \mathrm{d}t$$

converge absolument.
Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel noté $E(X)$ donné par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) \mathrm{d}t$$

On remarquera que l'intégrale impropre considérée doit converger absolument (pour des raisons relativement HP), et on admet que cette définition ne dépend pas de la densité f_X de X choisie (l'intégrale ne change pas d'une densité à l'autre). On a également la propriété de linéarité de l'espérance, pas donnée dans ce cours.

Pour continuer, voici le théorème de transfert pour les variables à densité:

Proposition 58. *Soit X une variable aléatoire à densité, et f_X une densité de X. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que $g(X)$ soit une variable à densité. Alors, $t \mapsto g(t)f_X(t)$ est continue par morceaux, et il est équivalent de dire :*

(i) $g(X)$ admet une espérance, et

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.

Dans ce cas,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Passons à la variance.

Définition 59. Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que X admet une variance si :

(i) X admet une espérance, et

(ii) $(X - E(X))^2$ admet une espérance.

Dans ce cas, on appelle variance de X le réel $V(X)$ donné par :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Remarque. On admet que cette définition est bien posée : si X est à densité et admet une espérance, alors $(X - E(X))^2$ est une variable aléatoire à densité.

Remarque. Pour Koenig-Huygens, on admet également que si X est à densité, alors X^2 l'est aussi.

Voici la version "variables aléatoires à densité" de Koenig-Huygens.

Proposition 60. *Soit X une variable aléatoire à densité. Il est équivalent de dire :*

(i) X admet une variance, et

(ii) X^2 admet une espérance.

Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

On doit donc, pour la variance, considérer les éventuelles espérances de X et X^2. Voici une définition plus générale.

Définition 61. Soit X une variable aléatoire à densité, et f_X une densité de X. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si la variable aléatoire X^r admet une espérance. Dans ce ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque. Des affirmations se sont glissée dans la définition ("et proposition", donc) ci-dessus. Premièrement, on peut montrer que si X est à densité, alors X^r est à densité pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Deuxièmement, le second point de la définition est une conséquence du théorème de transfert.

Remarque. On pourrait montrer que si une variable à densité X admet un moment d'ordre r, alors elle admet des moments d'ordre r' pour tout $r' \in [\![1, r]\!]$. On a déjà utilisé ce principe dans la formule de Koenig Huygens (si X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance).

Exemple 62. Voir ci-dessous !

4. Lois à densité usuelles

Vous avez trois lois à densité classiques à connaitre.

a) Loi uniforme sur un segment.

Proposition 63. *Soient a et b des réels tels que $a < b$. Alors, la fonction* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } a \le t \le b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ *est une densité de probabilité.*

Définition 64. Soit X une variable aléatoire réelle, et a, b deux réels tels que $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, et on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$$

si X est à densité, et admet pour densité de probabilité la fonction :

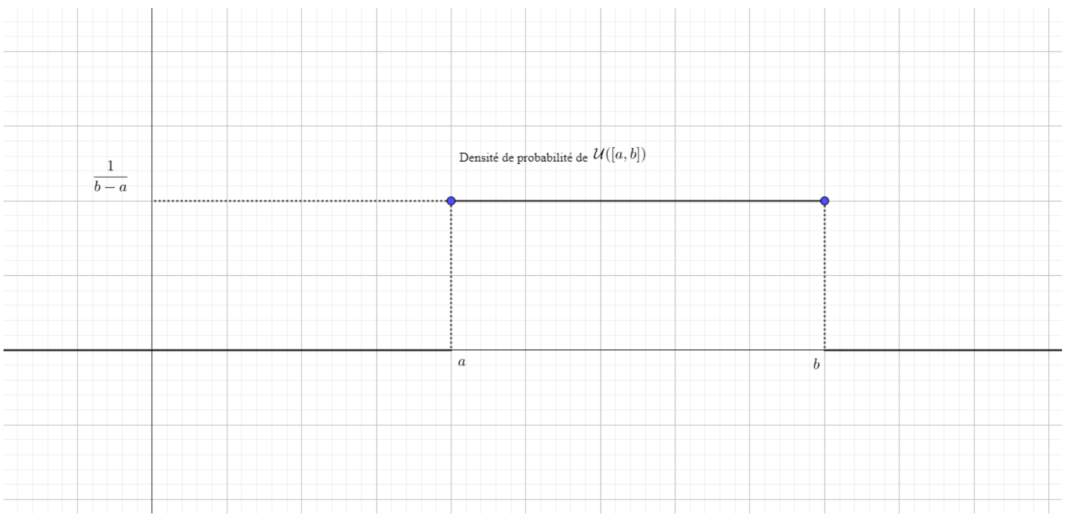
$$f_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } a \le t \le b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

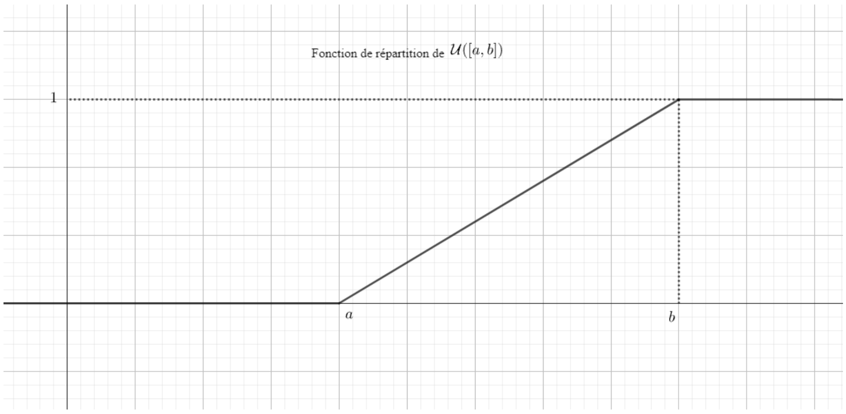
Proposition 65. *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, avec $a < b$ deux réels. Alors, la fonction de répartition de X est donnée par :*

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a \\ \frac{1}{b-a}(t-a) \text{ si } a \le t \le b \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Démonstration. En exercice de vacances. □

Remarque. Cela caractérise bien sur les variables aléatoires suivant une loi uniforme sur un segment.





Remarque. On peut retenir ces formules sans trop d'efforts. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$:

(*i*) "Sa" densité de probabilité f_X est nulle hors de $[a,b]$ et constante sur $[a,b]$. Cela revient à dire que X accorde le même "poids" à chaque réel de $[a,b]$, et un poids nul en dehors (X est "à valeurs" dans $[a,b]$).

(*ii*) La valeur de cette constante (prise sur $[a,b]$) est la seule possible pour avoir une aire de 1 (aire d'un rectangle), ce qui est nécessaire vu que f_X est une densité de probabilité.

Pour la fonction de répartition :

(*i*) Cette fonction est nulle avant a, constante égale à 1 après b. Cela provient du fait que X est "à valeurs" dans $[a,b]$.

(*ii*) Cette fonction est affine entre a et b.

(*iii*) La pente de cette fonction est $\dfrac{1}{b-a}$, car elle est affine, et augmente de 1 sur un intervalle de longueur $b-a$.

(*iv*) Cette fonction est nulle en a, d'où la formule affine $F_X(t) = \dfrac{1}{b-a}(t-a)$ pour $t \in [a,b]$.

Que dire de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant une telle loi?

Proposition 66. *Soient a et b deux réel tels que $a < b$. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Alors, X admet une espérance et une variance, et :*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration. Début : Soient a, b et X comme dans l'énoncé. Notons

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est une densité de probabilité de X.

Alors, $t \mapsto t^2 f_X(t)$ est nulle hors de $[a,b]$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\mathrm{d}t = \int_a^b t^2 f_X(t)\mathrm{d}t$$

Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance.

Suite : à faire ! □

b) Loi exponentielle

Proposition 67. *Soit $\lambda > 0$ un réel. Alors, la fonction* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \ si \ t \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$ *est une densité de probabilité.*

Définition 68. Soit λ un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle.
On dit que X suit la *loi exponentielle de paramètre* λ, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

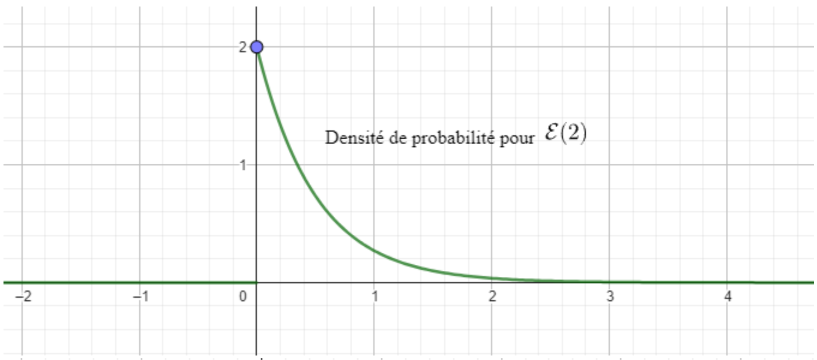
si X est une variable aléatoire à densité, et qu'une densité de X est donnée par :

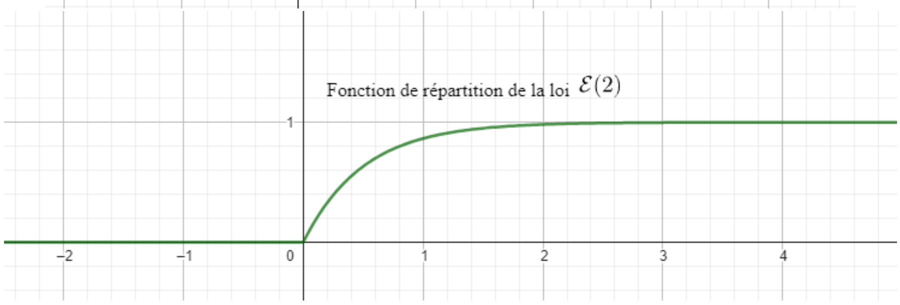
$$f_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Proposition 69. *Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors, la fonction de répartition F_X de X est donnée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \ si \ t \geq 0 \end{cases} .$$

Démonstration. Exercice pour les vacances. ☐





Remarque. Pour retrouver cette densité de probabilité pour une variable $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on retiendra qu'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est "à valeurs dans $\mathbb{R}_+$" (dont sa densité est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$), et que sur $\mathbb{R}_+$, cette densité est une exponentielle décroissante type $t \mapsto e^{-\lambda t}$. Le facteur multiplicatif permettant de retrouver $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est le seul facteur multiplicatif qu'on peut mettre pour avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \mathrm{d}t = 1$$

car $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda}$ (calcul à savoir refaire de tête ou en une ligne).

Proposition 70. *Soit λ un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors, X admet une espérance et une variance, et :*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration. Pour l'existence, on montrera que X admet un moment d'ordre 2, et on remarquera que l'intégrande étant à valeurs positive, il suffit de vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\mathrm{d}t$ converge. Calculs : à faire de suite. $\square$

Remarque. Il y a plus de choses à dire sur les lois exponentielle : ce sont les lois à densité sans mémoires (voir 2A). Elles apparaissent spontanément dans nombreux phénomènes physiques. Par exemple, elles modélisent bien le comportement de la radioactivité, ou la durée de vie d'un composant (informatique par exemple) qui a deux états (fonctionnel ou cassé). Le caractère "sans mémoire" traduit le fait suivant : un atome (resp. un composant) qui ne s'est pas désintégré ces 3000 dernières années a "la même chance" de se désintégrer aujourd'hui qu'il y a 3000 ans (il n'y a pas d'effet d'usure).

c) Loi normale

La loi normale, ou loi gaussienne, est la plus célèbre des lois à densité. Elle apparait spontanément dans de nombreux phénomènes probabilistes. Vous verrez même l'année prochaine qu'elle apparait dans... TOUTE répétition d'une expérience aléatoire (comprendre, d'une expérience aléatoire quelconque). Le sens précis donné à cette phrase sera donné dans le théorème central limite vu en 2A. C'est une des raisons pour laquelle elle intéresse tant les mathématiciens.

Proposition 71. (Admise.) *L'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$$

Proposition 72. *Soit m un réel et σ un réel strictement positif. Alors, la fonction*

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

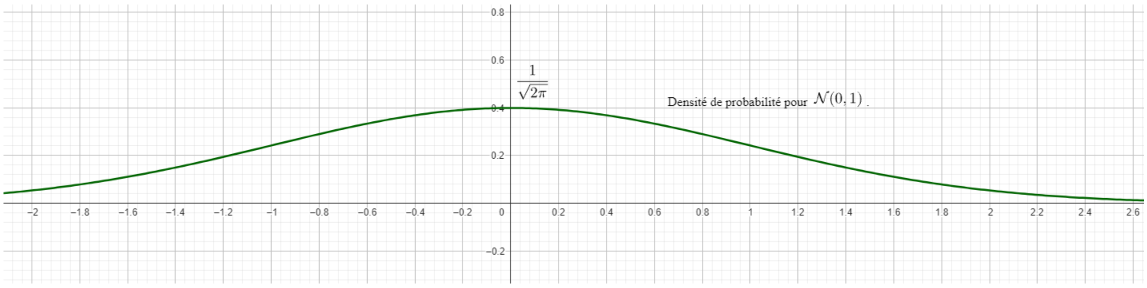
est une densité de probabilité.

Définition 73. Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la *loi normale de paramètre* (m, σ), et on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$$

si X est à densité, et admet pour densité de probabilité la fonction réelle donnée par:

$$f_X : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$



Cette fois-ci, on ne peut pas donner de formule plus simple, pour la fonction de répartition d'une telle variable aléatoire X, que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx.$$

(formule obtenue, par définition, en intégrant la densité).

Alors, on procède autrement. On nomme Φ la fonction de répartition obtenue pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Ha oui, admettons pour cette année le point suivant :

Proposition 74. *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma)$, où m et σ sont des réel tels que $\sigma > 0$. Alors, X admet une espérance et une variance, et :*

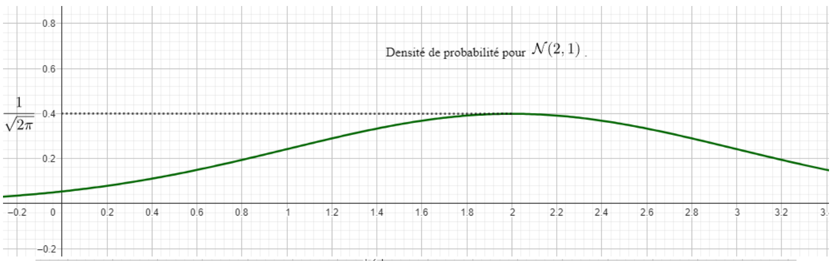
$$E(X) = m$$

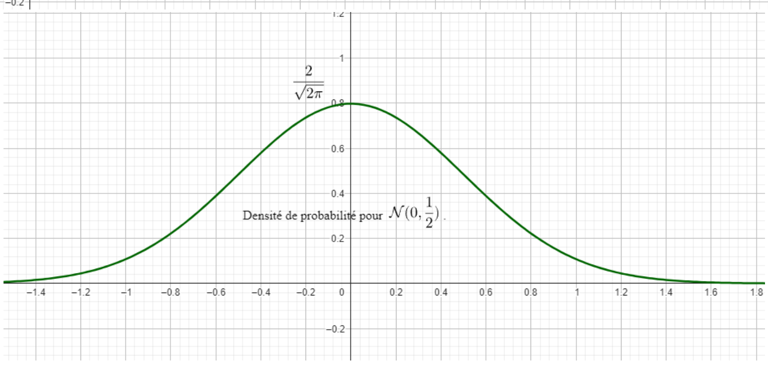
$$V(X) = \sigma^2$$

On retiendra que σ est donc l'écart-type de X.

Remarque. En particulier, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X est une variable aléatoire centrée réduite (espérance nulle, variance 1).

On peut voir l'effet des paramètres m et σ sur la densité de probabilité.





Plus l'écart type σ est faible, plus la bosse est "resserrée", c'est-à-dire plus la probabilité d'être proche de la moyenne est grande, ce qui est cohérent. La moyenne m est l'abscisse du sommet de la bosse.

Revenons à nos problèmes de fonction de répartition. Tout se base sur le fait suivant, utilisé constamment pour travailler avec les lois normales.

Proposition 75. (Normalisation d'une variable aléatoire suivant une loi normale) *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$, *alors* $\dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration. (A noter si le temps le permet). □

Pour travailler avec les lois normales, pour tous les problèmes liés aux fonctions de répartition :

(i) On nomme Φ la fonction de répartition obtenue pour la loi normale centrée réduire $\mathcal{N}(0,1)$ (notation classique),

(ii) On étudie Φ, par exemple en dressant une table de ses valeurs,

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors on ramène l'étude de F_X à celle de Φ à l'aide de la proposition précédente (la normalisation).

Exemple 76. Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale de paramètres $(-1, 3)$. On pose $Y = \dfrac{X+1}{3}$. On sait que $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (*on dit qu'on normalise la variable aléatoire* X).

Exprimer F_X en fonction de Φ à l'aide de Y.