Chapitre 0 : Premières résolution d'équations et d'inéquations (cours/TD)

ECG1 A, Lycée Hoche

Le but de ce premier document est d'apprendre à résoudre équations et inéquations les plus simples. On y voit les méthodes les plus basiques, les éléments indispensables à une bonne résolution et la manière dont la rédaction s'en trouve structurée.

Au fur et à mesure de l'année, nous verrons des méthodes permettant de résoudre d'autres équations et inéquations : utilisation de la monotonie (croissance et décroissance), de la stricte monotonie ou de l'injectivité de fonctions.

Ces résolutions d'équations et inéquations sont omniprésentes en mathématiques, il est nécessaire d'acquérir de bons réflexes au plus vite.

I. Structure générale d'une résolution

1. Équation, inéquation

Définition 1. On appelle *équation* (réelle) la donnée d'une égalité faisant intervenir une (ou des) variable(s) réelle(s), appelée(s) *inconnues*. On appelle *domaine de définition* d'une équation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans cette équation sont bien définies.

Remarque. Pour commencer, on se concentrera sur les équations et inéquations avec une seule inconnue. Voici un exemple d'équation à deux inconnues réelles x et y :

$$2x + 3y = 1.$$

Nous rencontrerons de telles équations dans les chapitres liés aux systèmes linéaires.

Le couple $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$ est une solution de cette équation.

Le couple $(x, y) = (1, -\dfrac{1}{3})$ en est une autre.

Remarque. *Le domaine de définition* (ou l'ensemble de définition) d'une équation (ou inéquation) est donc l'ensemble des valeurs en lesquelles on peut évaluer l'inconnue pour que l'égalité (ou inégalité) ait du sens, qu'elle soit vraie ou fausse. Par exemple :

(i) $2 < 1$ est une inégalité qui a du sens et qui est fausse,

(ii) $\sqrt{-1} = 1$ est une égalité mal définie (qui n'a pas de sens), car la fonction racine carrée n'est pas définie en -1.

Exemple 2. (i) L'équation (E) : $x^2 = x - 1$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}$ car les expressions x^2 et $x - 1$ sont définies pour tout réel x. On peut dire que (E) est une équation d'inconnue réelle x **définie sur** $\mathbb{R}$ (ou de domaine de définition $\mathbb{R}$).

"(E) est une équation d'inconnue réelle x" signifie que dans l'équation (E), l'inconnue x est un nombre réel (ça pourrait être un entier, ou des objets plus compliqués : une fonction, une matrice...).

Et "définie sur $\mathbb{R}$" signifie que l'égalité étudiée $x^2 = x - 1$ est définie pour tout réel x (on ne parle pas encore de ses solutions à ce stade).

(ii) L'équation $\dfrac{x+2}{x-1} = 2$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. En effet :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
- L'expression $\dfrac{x+2}{x-1}$ est bien définie ssi ("si et seulement si" exprime une équivalence) $x - 1 \neq 0$ (on ne peut pas diviser par 0 et il n'y a pas d'autres opérations interdites ici).
- Or, $x - 1 = 0 \iff x = 1$ (on ajoute 1 des deux côtés).
- Donc $\dfrac{x+2}{x-1}$ est bien définie ssi $x \neq 1$.
- De plus, 2 est bien défini (le second membre n'ajoute pas de contrainte).
- Donc finalement, l'équation $\dfrac{x+2}{x-1} = 2$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Définition 3. On appelle *inéquation* (réelle) la donnée d'une inégalité faisant intervenir une (ou des) variable(s) réelle(s), appelée(s) *inconnues*. On appelle *domaine de définition* d'une inéquation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans cette inéquation sont bien définies.

Exemple 4. (i) L'inéquation $(E) : x^2 \leq x - 1$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}$ car les expressions x^2 et $x - 1$ sont définies pour tout réel x. On peut dire que (E) est une inéquation d'inconnue réelle x **définie sur** $\mathbb{R}$, ou que l'inéquation $x^2 = x - 1$ (d'inconnue réelle x) admet pour domaine de définition $\mathbb{R}$.

(ii) L'inéquation $\ln(x) > 2$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet :

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

(b) L'expression $\ln(x)$ est bien définie ssi $x > 0$ (d'après le domaine de définition de la fonction logarithme).

(c) De plus, 2 est bien défini (le second membre n'ajoute pas de contrainte).

(d) Donc finalement, l'inéquation $\ln(x) > 2$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résolution d'une équation ou inéquation

On ne regarde maintenant que des équations ou inéquations à une inconnue.

Définition 5. Soit (E) une équation (respectivement une inéquation) à une inconnue réelle x. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

(i) On appelle *solution de* (E) tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que l'égalité (respectivement, l'inégalité) obtenue en substituant la valeur x à l'inconnue est vraie.

(ii) On appelle *ensemble des solutions* de (E) l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui sont solutions de (E).

(iii) *Résoudre* (E), c'est déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Remarque. Ainsi :

(i) Pour déterminer si un réel donné t est solution d'une équation ou inéquation (E), il suffit de faire prendre la valeur t à l'inconnue et de constater si l'égalité ou inégalité est vraie.

(ii) Résoudre une équation ou inéquation (E) est plus complexe : il s'agit de déterminer toutes ses solutions (et de les donner sous la forme d'un ensemble).

Exemple 6. (*i*) 2 est-il solution de $x^3 + x - 10 \geq 0$? On commencera par remarquer que cette inéquation est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(*ii*) 3 est-il solution de $\dfrac{x+1}{x-2} = 2$?

(*iii*) -1 est-il solution de $\ln(x) = 1$?

(*iv*) Résolvons l'équation $x + 1 = 3x - 3$.

Étapes de résolution d'une équation ou inéquation

La résolution d'une équation ou inéquation se déroule systématiquement en trois étapes.

(*i*) La détermination du **domaine de définition** de l'équation. On examine les expressions qui interviennent, on identifie toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles ces expressions sont bien définies. Autre manière de le dire : on cherche les "valeurs interdites" (faire disparaitre cette expression à l'écrit).

(*ii*) **résolution** de l'équation. On cherche toutes les solutions de l'équation ou inéquation. Pour cela, on s'aide de calculs, d'arguments d'analyse (ex : étude de fonction) et de logique.

(*iii*) La rédaction d'une **Conclusion**, dans laquelle on donne proprement l'ensemble des solutions recherché.

Exemple 7. (et modèle de rédaction.) Résolvons l'équation $\dfrac{2x+1}{x-2} = 3$.

Exemple 8. (et modèle de rédaction.) Résolvons l'équation $\dfrac{x+1}{x-1} = 1$.

Il ne faut pas oublier de vérifier que les solutions trouvées appartiennent bien au domaine de définition !

Exemple 9. (et modèle de rédaction.) Résolvons l'équation $\dfrac{2x-2}{x-1} = 1$.

Remarque. (*i*) Il est courant de nommer par une lettre le domaine de définition et l'ensemble des solutions d'une équation, pour s'en servir plus tard par exemple. Mais vous devez choisir la lettre. Deux formulations utiles, pour donner votre réponse tout en nommant ces objets : "L'ensemble de définition de cette équation est donc $\mathcal{D} = \ldots$", "L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \ldots$".

(*ii*) Le symbole " $\iff$ " est le symbole d'équivalence mathématique. Il se lit "équivaut à", et ne doit pas être utilisé comme une abréviation dans une phrase en français. Mis entre deux propositions, il exprime que l'une est vraie exactement quand l'autre l'est. Par exemple, pour tout réel x :

$$x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Attention, ici on ne dit pas que : "pour tout réel x, $x + 1 = 0$ est vrai et $x = -1$ est vrai" (ceci est très faux).

(*iii*) Il se peut qu'une équation/inéquation n'ait pas de solutions. Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est *l'ensemble vide*, noté $\emptyset$.

(*iv*) Pensez à vous relire : si vous trouvez un petit nombre de solutions, vérifiez au brouillon qu'elles conviennent.

II. Résolution d'équations

Premières techniques de résolution d'équations

Voici les premières opérations qu'on utilisera (systématiquement) pour résoudre des équations.
A partir d'une égalité, on obtient **une égalité équivalente** en :

(*i*) **ajoutant** une même expression à chaque membre de l'égalité.
Exemple : Pour tout réel x,

$$x+1=2x-1 \iff x+1-1=2x-1-1 \iff x=2x-2.$$

(*ii*) **multipliant** chaque membre de l'égalité par un même réel **non-nul**.
Exemple : Pour tout réel x,

$$2x=1 \iff 2x\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2} \iff x=\frac{1}{2}.$$

(*iii*) En **appliquant** une même **fonction strictement monotone** à chaque membre d'une égalité, sous réserve que cette fonction soit bien définie en ces valeurs. Par exemple, on pourra appliquer la fonction exponentielle, la fonction logarithme si chaque membre de l'égalité est strictement positif, la fonction racine carrée si chaque membre de l'égalité est positif...
Exemple : Pour tout réel x strictement positif,

$$\ln(x)=37 \iff e^{\ln(x)}=e^{37} \iff x=e^{37}.$$

De plus, on cherche souvent à ramener une équation sous la forme "$\ldots=0$". Une fois ceci fait, on peut utiliser :

(*iv*) La règle du **produit nul**.
Exemple : Pour tout réel t,

$$(t-1)(t+4)=0 \iff t-1=0 \text{ ou } t+4=0.$$

(*v*) Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.
Exemple : Pour tout réel a tel que $a\neq 2$,

$$\frac{a^2+a+1}{a-2}=0 \iff a^2+a+1=0.$$

Enfin, pour résoudre les équations du second degré (comme $2x^2+3x-1=0$), on utilise la méthode du **discriminant**.
Cette liste sera complétée au fur et à mesure de l'année (notions de fonctions monotones, strictement monotones, injectives, utilisation de la continuité...)

Exercice 10. Résoudre (proprement) chacune des équations suivantes.

a) $\frac{2}{3}x-2=\frac{1}{2}x+2$

b) $\frac{x-1}{3}=\frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x-2}{x+2}=-3$

d) $\frac{5x-2}{2x+2}=2$

e) $3+\frac{2}{x-1}=5$

f) $2x^2=-x$

g) $x^2=3$

h) $x^2=-x+2$

i) $x^2=-x-1$

j) $3x^2+5x+2=0$

k) $x^2-\frac{3}{5}x+\frac{15}{8}=0$

l) $x^2-2x-4=0$

m) $(x-1)(x^2+2x-1)=0$

n) $\frac{x+2}{x-1}=2x$

o) $\frac{x+2}{x-3}=\frac{x+1}{x-1}$

p) $\frac{3x-2}{x^2-1}=0$

q) $1-\frac{2}{x^2+2}=x$

r) $\frac{x^2+x-2}{x-1}=0$

s) $\ln(x)-\ln(x-1)=1$

t) $\ln(x+\frac{1}{x})=\ln(3)$

u) $\ln(4x-3x^2)=0$

v) $e^{2x^2+1}=\frac{1}{e^{2x}}$

w) $\frac{e^x-1}{e^x+2}=\frac{1}{2}$.

III. Résolution d'inéquations

Premières techniques de résolution d'inéquations

Á partir d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente en :

(i) **ajoutant** une même expression à chaque membre de l'inégalité.
Exemple : Pour tout réel x,

$$x+1<2x-1 \iff x+1-1<2x-1-1 \iff x<2x-2.$$

(ii) **multipliant** chaque membre de l'inégalité par un même réel **strictement positif** (donc non nul).
Exemple : Pour tout réel x,

$$2x \geq 1 \iff 2x \cdot \frac{1}{2} \geq 1 \cdot \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{1}{2}.$$

(iii) **multipliant** chaque membre de l'inégalité par un même réel **strictement négatif** (donc non nul) et en **changeant le sens** de l'inégalité.
Exemple : Pour tout réel x,

$$\frac{x}{-2} \geq 1 \iff -2 \cdot \frac{x}{-2} \leq -2 \cdot 1 \iff x \leq -2.$$

(iv) En appliquant une fonction **strictement croissante** (comme l'exponentielle, le logarithme ou la racine carrée)de chaque côté de l'inégalité, sous réserve que cette fonction soit bien définie en ces points.

De plus, on cherche souvent à ramener une inéquation sous la forme d'une inéquation avec un membre nul (par exemple, $x^2 \geq x \iff x^2 - x \geq 0$). Une fois ceci fait, on peut utiliser :

(i) La **règle des signes** pour déterminer le signe d'un produit. Pour cela, on dresse très souvent un **tableau de signes**.
Exemple : Résolvons l'inéquation définie sur $\mathbb{R}$ par $x^2 \leq x$. Pour tout réel x :

$$x^2 \leq x \iff x^2 - x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0.$$

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x-1$		-		-	0	+	
$x(x-1)$		+	0	-	0	+	

Ainsi, $x^2 \leq x \iff x(x-1) \leq 0 \iff x \in [0,1]$.
Donc l'ensemble des solutions de $x^2 \leq x$ est l'ensemble $[0,1]$.

(ii) Utiliser à nouveau un tableau de signe pour résoudre les inéquations du second degré (en passant par le discriminant).

Remarque. Attention, quand on construit un tableau de signe, les signes donnés sont stricts : il faut déterminer toutes les valeurs d'annulation de nos expressions, et les inscrire.

Exercice 11. Résoudre (proprement) chacune des inéquations suivantes.

a) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}x - 2$

b) $(x-2)(2x+1) < 0$

c) $\frac{x-2}{2x+3} \geq 1$

d) $\frac{x+1}{x} < 1$

e) $x^2 \leq -x$

f) $\frac{x^2}{3} > 5$

g) $x^2 - 4x - 3 < 0$

h) $2x \geq x^2 + 2$

i) $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

j) $\frac{3x-2}{2-x} \geq 1 - 2x$

k) $\frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{x-2}$

l) $\frac{2x}{x^2-1} \leq 2x$

m) $\ln(\ln(x)) > 0$

n) $\frac{1-x}{1+x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 0$

o) $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2}$

p) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{1}{2}$

q) $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2}$

Attention, calculs...

Vous devez, au plus vite, être à l'aise avec :

(i) Les calculs avec les fractions,

(ii) Les calculs avec les puissances,

(iii) Les propriétés des fonctions logarithmes et exponentielles. Exemple :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a e^b$$

Interro. vendredi!

Exercice 12. Entrainement. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

(i) $A = \dfrac{2}{3}(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2})$

(ii) $B = \dfrac{\frac{4}{3} - 5}{\frac{3}{4}}$

(iii) $C = 2^3 \times 4^{-2}$

(iv) $D = \dfrac{2^{-2}4^3 5^4 3^7}{2^8 5^{-3}}$

(v) $E = \ln(\sqrt{e^4}) + \ln(\sqrt{e^2})$

(vi) $F = \ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}\right) + \ln\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}\right)$

(vii) Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression $G = (x-1)(2x^2+4x) - (3x-2)(x-1)$