Chapitre 1 : Logique, langage mathématique et raisonnements

ECG1 A, Lycée Hoche

Dans ce chapitre, on dévoile le langage mathématique utilisé unanimement par les mathématiciens et mathématiciennes depuis le début du 20e siècle, celui la théorie des ensembles. On introduit la logique et les structures de démonstration classiques qui en découlent.

La première leçon : apprendre à appliquer un théorème (et à lire un cours de maths)

Ce premier point est absolument capital pour tout le reste de l'année. Vous devez apprendre à appliquer un théorème. Ce n'est pas bien compliqué, mais c'est une première étape à bien comprendre afin de bien comprendre la logique mathématique et les standards de rédaction qui en découlent.

Un cours de mathématiques est essentiellement composé de 3 types de textes : des définitions, des théorèmes et des démonstration. Bien sûr, pour être intéressant, il doit s'illustrer d'exemples, de remarques et d'exercices - et ces points ne doivent jamais être négligés à la lecture.

Définition

Donner une définition, c'est simplement donner un nom à un type d'objet mathématique. Dans votre approche d'étudiant, vous n'avez pas le choix : **les définitions doivent être connues par cœur**. Sans cela, il vous sera impossible de comprendre les énoncés des exercices.

Voici un exemple.

Définition 1. Soit I un intervalle réel, et f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est une fonction *croissante* sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Remarque. (*i*) Dans cette définition, on définit la notion de "fonction croissante sur un intervalle".

(*ii*) Une fois cette définition posée, on a le droit de considérer l'énoncé "f est croissante sur I" dès que I désigne un intervalle, et f une fonction définie sur I (c'est-à-dire tel que I soit inclus dans le domaine de définition de f).

(*iii*) Dans ce cas, dire que l'énoncé "f est croissante sur I" est vrai revient exactement à dire que l'énoncé mathématique suivant est vrai :

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Théorème, lemme, proposition, propriété...

Théorèmes, lemmes, propositions, propriétés, faits... sont, d'un point de vue logique, des synonymes. L'utilisation d'un terme ou de l'autre est liée à l'appréciation qu'on fait de l'importance du résultat - ce qui est assez subjectif. L'usage est de désigner par "théorème" un résultat majeur, par "proposition" un résultat intermédiaire important, et par "lemme" un petit résultat qu'on utilise immédiatement pour démontrer une proposition ou un théorème. Vous n'avez pas à vous embêter avec cette distinction, et d'ailleurs on utilisera largement le mot "théorème", tout au long de l'année, pour désigner l'un quelconque de ces types de résultats.

Alors, un théorème est une assertion mathématique qui est vraie. Lorsqu'on est confronté à un théorème, on doit bien identifier et apprendre les hypothèses et les conclusions du théorème, sans quoi on ne pourra pas l'appliquer proprement.

Appliquer un théorème, c'est - dans le cadre d'une démonstration, en exercice par exemple - dire à son lecteur que le théorème s'applique dans notre contexte. L'unique recette est la suivante :

(i) Vérifier que toutes les hypothèses du théorèmes sont vraies, puis

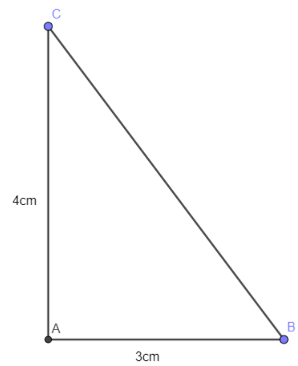
(ii) dire qu'on applique un théorème. On peut pour cela invoquer la formule "par théorème", ou donner le nom du théorème s'il en a un.

(iii) Enfin, on peut conclure la conclusion *exacte* du théorème, sans altérer celle-ci.

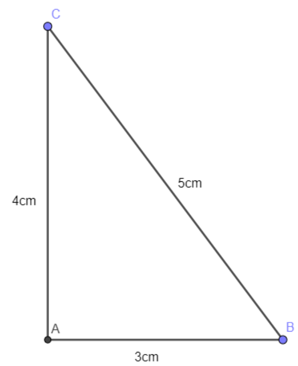
Exercice 2. Donner deux théorèmes. Identifier les hypothèses et les conclusions.

Exercice 3. Donner deux autres théorèmes, faire de même.

Exercice 4. Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A. Déterminer la longueur BC.



Exercice 5. Démontrer que le triangle ABC ci-dessous est un triangle rectangle.



Remarque. Un théorème est une assertion mathématique qui est vraie. Sa véracité est prouvée dans un texte appelé "démonstration". Cette démonstration s'appuie sur des théorèmes et définitions antérieures. Et vu qu'il faut bien partir de quelque part : on appelle axiome un énoncé mathématique dont on admet la véracité. Les axiomes de la théorie des ensembles sont intéressants, mais dépassent largement le cadre de ce cours. Au lieu de s'y intéresser, on admettra occasionnellement certains résultats mathématiques :

on prendra des théorèmes comme vrais sans donner leur démonstration (ces résultats admis sont souvent des "points de départs" du cours).

Démonstration

Une démonstration est un texte qui décrit un raisonnement permettant d'affirmer qu'un résultat mathématique est vrai, autrement dit qu'un énoncé est bien un théorème. On en reparlera longuement pendant ce chapitre.

I. Premières notions de théorie des ensembles

Idée. En mathématiques, on manipule des objets de différentes natures : des nombres entiers, des nombres réels, des suites réelles, des fonctions, des suites de fonctions, des points du plan, des nombres binaires etc. Ces objets sont invoqués lors de raisonnements (les démonstrations, ou preuves) permettant d'établir des résultats mathématiques. Ces raisonnements s'appuient sur la logique. Vous comprendrez au fur et à mesure de votre apprentissage que les ensembles ont la double fonction de formaliser cette notion de nature d'un objet, et d'être entièrement compatibles avec nos règles logiques. Un chapitre ultérieur reviendra sur la notion d'ensemble.

1. Ensembles usuels du lycée

Voici les premiers ensembles auxquels vous devriez penser.

Définition 6. (*i*) On appelle *ensemble des entiers naturels*, et on note $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers positifs :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

(*ii*) On appelle *ensemble des entiers relatifs*, et on note $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres entiers :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

(*iii*) On appelle *ensemble des nombres rationnels*, et on note $\mathbb{Q}$, l'ensemble des fractions rationnelles, c'est-à-dire l'ensemble des fractions d'entiers relatifs (avec un dénominateur non nul). Ainsi :

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

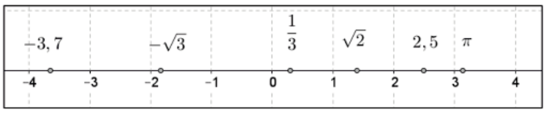
Remarque. L'écriture "$\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$" se lit : "L'ensemble des p sur q, pour p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{Z}$, avec q non nul".

Remarque. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est donc l'ensemble des fractions d'entiers, comme $\frac{1}{3}$ ou $\frac{-3}{-7}$. Comme vous devriez le savoir, la règle des signes permet par exemple d'écrire $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$, $\frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$, et $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$. Plus généralement, tout nombre rationnel s'écrit comme une fraction dont le dénominateur est positif. On a donc la définition équivalente suivante **qui est la bonne définition à retenir** de l'ensemble $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$$

où $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots\}$ des nombres naturels non nuls.

Définissons maintenant l'ensemble des nombres réels. On appelle droite graduée toute droite donnée avec une origine (le point noté 0) et une unité (le point noté 1). On se représente très bien les réels sur une droite graduée.



Les nombres réels sont tous les nombres correspondants à un point sur cette droite. Les entiers relatifs sont donc des nombres réels, les nombres rationnels également, mais certains nombres réels comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres irrationnels : on ne peut les écrire sous la forme d'une fraction rationnelle.

Définition 7. On appelle *ensemble des nombres réels*, et on note $\mathbb{R}$, l'ensemble de nombres représenté par une droite graduée.

Remarque. Cette représentation des réels en une droite graduée est très importante, et illustre par exemple très bien la notion d'ordre sur les réels : un nombre réel x est inférieur ou égale à un nombre réel y si et seulement si "x est plus à gauche que y sur cette droite graduée".

Remarque. Pour les ensembles introduits jusqu'ici, on adoptera la notation suivante : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturel non nuls, des entiers relatifs non nuls, des nombres rationnels non nuls et des nombres réels non nuls.

2. Élements d'un ensemble et quantificateurs

a) Appartenance et inclusion

Vous pouvez raisonnablement penser à un ensemble comme à un sac d'objets mathématiques ayant la même nature (cette nature étant... le nom de l'ensemble). Les objets d'un ensemble sont appelés *les éléments* de cet ensemble.

Exemple 8. (i) 2 est un élément de $\mathbb{N}$, et aussi un élément de $\mathbb{Z}$,

(ii) les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les fractions rationnelles,

(iii) Il existe un élément de $\mathbb{R}$ qui n'est pas élément de $\mathbb{Q}$, par exemple $\sqrt{2}$.

Au passage, vous devez savoir cette définition.

Définition 9. On appelle *ensemble vide*, et on note $\emptyset$, l'ensemble mathématique n'ayant aucun élément.

Cet ensemble sera très utile pendant l'année : pour dire qu'un ensemble F n'a pas d'éléments, on écrit $F = \emptyset$.

Définition 10. Soit x un objet mathématique et E un ensemble.

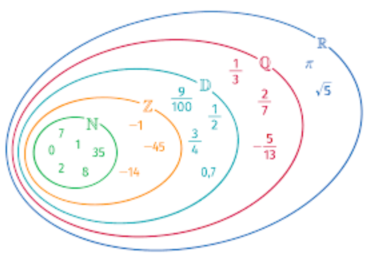
(i) La notation $x \in E$ se lit "x appartient à E" et signifie que x est un élément de E.

(ii) La notation $x \notin E$ se lit "x n'appartient pas à E" et signifie que x n'est pas un élément de E.

Remarque. Cette définition est un point de départ : on n'écrira (quasi) plus jamais "Soit x un objet mathématique", mais vous devez comprendre que, dans la définition ci-dessus, le symbole x peut désigner tout objet mathématique.

Définition 11. Soient A et B deux ensembles. On dit que *A est inclus dans B*, et on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B. On dit aussi que *A est un sous ensemble de B*, ou que *A est une partie de B*.

Exemple 12. On peut écrire la suite d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On peut représenter ces inclusions à l'aide de "patates", (appelées aussi diagrammes de Venn).



b) Quantificateurs

En mathématiques, on accorde toujours une place particulière au degré de généralité d'un énoncé. Par exemple, la phrase

$$e^x > 0$$

n'a de sens que si l'on a précisé avant qui est x. Est-ce un nombre explicite donné? Veut-on dire que l'inégalité est vraie pour tout nombre x? Si oui, de quelle nature? On pourrait enfin vouloir dire que cette inégalité est vérifiée par au moins (ou exactement) un nombre x, sans avoir à préciser lequel.

Définition 13. Soit E un ensemble. Les symboles suivants permettent d'introduire des variables dans une phrase mathématiques.

(*i*) "$\forall x \in E$" se lit "pour tout x appartenant à E" et introduit une variable x à laquelle on peut substituer n'importe quel élément de E.

(*ii*) "$\exists x \in E$" se lit "il existe x appartenant à E" et introduit une variable x à laquelle on peut substituer au moins un élément de E (pas forcément précisé).

(*iii*) "$\exists! x \in E$" se lit "il existe un unique x appartenant à E" et introduit une variable x à laquelle on peut substituer un unique élément de E (pas forcément précisé).

Exemple 14. (*i*) La proposition (ou assertion) "$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$" signifie, en français : pour tout réel x, l'exponentielle de x est strictement positive. On peut reformuler cet assertion de manière plus compacte en : l'exponentielle de tout réel est strictement positive. Cette assertion est vraie.

(*ii*) La proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q}$" signifie que pour tout réel x, x est un nombre rationnel. Cette assertion est fausse, par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel.

(*iii*) La proposition "$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n$" signifie : il existe un entier naturel n tel que, pour tout réel x, on ait $x \leq n$. Exercice : reformuler cette assertion sans mathématiques. Sans justification, cette assertion est-elle vraie?

(*iv*) La proposition "$\exists! x \in \mathbb{R}, e^x = 1$" signifie qu'il existe un unique nombre réel x tel que $e^x = 1$. Cette assertion est vraie : on peut démontrer que le seul réel x tel que $e^x = 1$ est $x = 0$.

(*v*) La proposition "$\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$" est-elle vraie?

Remarque. Lecture de la virgule L'énoncé suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q}$$

se lit littéralement "Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, x appartient à $\mathbb{Q}$". La virgule (mathématique) est ici traduite en virgule française (la première partie de la proposition conditionne le sens de la seconde et une virgule française exprime bien cette dépendance). Par contre, l'énoncé :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q}$$

se lit "Il existe x appartenant à $\mathbb{R}$ **tel que** x appartient à $\mathbb{Q}$". La virgule est traduite en un "tel que", nécessaire pour exprimer le liens entre les deux parties de la phrase. Une virgule suivant un quantificateur $\exists$ ou $\exists!$ est toujours traduite ainsi.

Exercice 15. Traduire tous les énoncés suivants en phrase mathématique. Donner leur véracité, et une démonstration si vous vous en sentez capable.

(*i*) Étant donné un nombre réel, on peut toujours trouver un nombre réel qui lui est strictement supérieur.

(*ii*) Il existe un entier naturel inférieur à tous les entiers naturels.

(*iii*) Pour tout réel strictement positif x, on peut trouver un réel non nul dont le carré est inférieur à x.

(*iv*) Il existe un nombre réel x tel que $2x + 1 = 0$.

(*v*) L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ admet une solution réelle (respectivement, une unique solution réelle).

Remarque. Rédaction, Important Comme vous commencez à le voir, on a le choix, pour écrire les mathématiques, entre l'utilisation du français et celle des symboles mathématiques. A ce titre, **les symboles mathématiques ne sont pas des abréviations**. Seule exception : vous pouvez, dans un texte en français, utiliser le symbole d'appartenance, comme dans "Soit $x \in \mathbb{R}$".

Maths $\neq$ Français

Attention à ce point de rédaction qui crispe tout correcteur.
Quand vous écrivez un texte mathématique, vous avez le droit :

(i) D'écrire une phrase en français correcte, qui commence par une majuscule et se termine par un point,

(ii) d'écrire une assertion entièrement en langage mathématique (correcte en terme de syntaxe et de sens),

(iii) de désigner, au sein d'une phrase en français, une assertion mathématique.

Soyez attentif à l'alternance que vous pourrez constater dans vos modèles de rédaction, tentez d'en comprendre la logique

Exemple 16. Noter une démonstration correcte commentée de l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} \geq 1.$$

Remarque. On pourrait même mettre les parties mathématiques entre guillemets, pour plus de précision.

II. Propositions

1. Propositions, propositions à paramètres

En mathématiques, on manipule ce qu'on appelle des propositions.

Définition 17. *(Définition informelle)* On appelle proposition toute phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse.

Remarque. On peut tout à fait se référer à une proposition en la nommant par une lettre. Cette remarque tient pour tout objet mathématique.

Remarque. Dans le cours de mathématiques, quand on écrit "**Proposition :**", c'est pour indiquer que la proposition mentionnée est vraie.

Exemple 18. (i) "Il ne pleut pas" est une proposition. Mais "$\forall n \in \mathbb{N}, 2n$" n'est pas une proposition.

(ii) La phrase $e^x > 0$ n'est, à priori, pas une proposition, car si l'on connait la fonction exponentielle, on ne sait pas qui est x. Cette phrase ne se suffit pas à elle-même.

(iii) La phrase $e^x > 0$ devient une proposition si on a auparavant posé, par exemple, $x = 2$. Cette proposition est alors égale à la proposition $e^2 > 0$.

(iv) Les phrases $\mathcal{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, e^x < 0$" et $\mathcal{Q}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, e^x < 0$" sont deux propositions tout à fait valides. Par contre, elles sont fausses, car la proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$" est vraie.

(v) La phrase "Cette proposition est fausse" n'est pas une proposition, car on ne peut lui associer de valeur de vérité (vrai/faux). Et en plus, cette phrase est auto-référente, ce qui est interdit : toute proposition doit-être énoncée à l'aide d'objets déjà existants.

On a le droit de considérer des propositions contenant des variables, comme "$e^x > 2$", sans avoir posé x avant, à condition de préciser la nature de la variable x.

Définition 19. On appelle *proposition à paramètres* toute proposition dépendant d'une (ou plusieurs) variable dont l'ensemble d'appartenance est spécifié. Autrement dit, une proposition $\mathcal{P}$ paramétrée par l'ensemble E est la donnée, pour tout élément e de E, d'une proposition $\mathcal{P}(e)$. On notera alors $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(e))_{e \in E}$.

Remarque. Une proposition à paramètres n'a pas *une seule* valeur de vérité, mais une valeur de vérité pour chaque valeur possible du paramètre.

Exemple 20. (*i*) Soit, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$n^2 > n$". On a ainsi défini une proposition $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ paramétrée par l'ensemble $\mathbb{N}$. Alors :

(a) $\mathcal{P}(0)$ s'écrit $0^2 > 0$, ce qui est faux.

(b) $\mathcal{P}(1)$ s'écrit $1^2 > 1$, ce qui est faux.

(c) Mais vous pouvez vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(*ii*) La proposition $\mathcal{P}$ paramétrée par $\mathbb{R}^*$ et donnée par $\mathcal{P}(x)$: "$\frac{1}{x} > 0$" ne pourrait pas s'étendre naturellement en une proposition paramétrée par $\mathbb{R}$, car $\frac{1}{0}$ n'est pas défini.

(*iii*) Pour définir une proposition à paramètres, vous devriez utiliser l'une formules suivante :

(a) Soit, pour tout réel x, $\mathcal{P}(x)$: "$x^2 + 2x + 1 = 0$".

(b) Soit $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(x))_{x\in\mathbb{R}}$ donnée par $\mathcal{P}(x)$: $x^2 + 2x + 1 = 0$.

(c) Soit $\mathcal{P}(x)$ la proposition donnée par $x^2 + 2x + 1 = 0$, pour tout réel x.

(d) Considérons, pour x élément de $\mathbb{R}$, la proposition $\mathcal{P}(x)$: "$x^2 + 2x + 1 = 0$".

(*iv*) Une fois la proposition définie comme ci-dessus, vous pouvez :

(a) Vous référer à la proposition à paramètre avec $\mathcal{P}$ ou $(\mathcal{P}(x))_{x\in\mathbb{R}}$,

(b) vous référer à chacune des propositions $\mathcal{P}(x)$, qui sont individuellement vraies ou fausses, à condition d'avoir introduit la variable x avant (avec un quantificateur, une phrase en français équivalente, ou bien en attribuant directement une valeur à x).

(c) Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est une proposition. Et plus encore :

Définition 21. Soit E un ensemble, et $\mathcal{P}$ une proposition paramétrée par E. Alors :

(*i*) "$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$" est une proposition qui est vraie exactement quand toutes les propositions $\mathcal{P}(x)$ sont vraies, pour x élément de E.

(*ii*) "$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$" est une proposition qui est vraie exactement s'il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$" est vraie.

(*iii*) "$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$" est une proposition qui est vraie exactement s'il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarque. Dans un cours de mathématiques, quand on écrit **Proposition :** ou **Théorème :** , c'est pour signifier que la proposition donnée est vraie. De même, on aurait pu écrire dans l'énoncé précédent: "$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$" est une proposition qui est vraie s'il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$. Comprenez : si $\mathcal{Q}$ est une proposition, écrire "tel que $\mathcal{Q}$" revient à écrire "tel que $\mathcal{Q}$ est vraie".

Exercice 22. Donner le statut des phrases suivantes, et le cas échéant, dire si la proposition est vraie ou fausse.

(*i*) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > y$,

(*ii*) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{Z}, z < 0$ et $z^2 = n^2$,

(*iii*) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$ ou $y < z < x$.

2. Comment se donner un ensemble

Il existe deux moyens de se donner un ensemble.

Définition 23. (*i*) Se donner un ensemble en *extension*, c'est donner un ensemble en donnant la liste de ses éléments. Voici les 3 moyens classiques de le faire.

$$\begin{aligned} E &= \{1,2,3,5\} && \text{(cas d'un ensemble fini)}\\ F &= \{0,2,4,6,\dots\} && \text{(cas d'un ensemble infini particulièrement simple)}\\ F &= \{2k \mid k\in\mathbb{N}\} && \text{(Utilisation d'une formule pour paramétrer l'ensemble).} \end{aligned}$$

(*ii*) Se donner un ensemble *en compréhension*, c'est se donner un ensemble comme sous-ensemble d'un autre, à l'aide d'une proposition à paramètre. Par exemple :

$$F = \{n\in\mathbb{N} \mid \exists k\in\mathbb{N}, n=2k\}$$

Remarque.
- $\{2k|k\in\mathbb{N}\}$ se lit "L'ensemble des $2k$, pour k appartenant à $\mathbb{N}$".
- $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}, n=2k\}$ se lit "L'ensemble des entiers n tels que : $\exists k\in\mathbb{N}, n=2k$".

Remarque.
- Considérons une définition en extension :

$$G = \{\overbrace{2k^2+k+1}^{\text{formule}} \mid \overbrace{k\in\mathbb{Z}}^{\text{paramètre(s)}}\}.$$

Ici, G est l'ensemble des objets de la forme $2k^2+k+1$, où le paramètre k décrit l'ensemble des entiers relatifs. En particulier, $G\subset\mathbb{Z}$ car : $\forall k\in\mathbb{Z}, 2k^2+k+1\in\mathbb{Z}$.

- Considérons une définition en compréhension :

$$H = \{\overbrace{n\in\mathbb{Z}}^{\text{Ensemble "ambiant"}} \mid \overbrace{n^2<10}^{\text{propriété décrivant le sous ensemble}}\}.$$

Cette définition affirme que :

(*i*) H est la partie de $\mathbb{Z}$...

(*ii*) ... formée des éléments n tels que : $n^2<10$.

Remarque. Les trois définitions données pour F correspondent. Dans la deuxième, on dit que les entiers naturels pairs sont les doubles des entiers naturels. Dans la troisième, on dit que les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, où k désigne un entier naturel.

Remarque. Définir un ensemble en compréhension revient à donner une proposition à paramètre. Ici il s'agit de la proposition " $\exists k\in\mathbb{N}, n=2k$" pour $n\in\mathbb{N}$.

3. Les intervalles réels

On aura souvent besoin d'utiliser certaines parties de $\mathbb{R}$, les intervalles.

Définition 24. Soient a et b deux réels, ou éventuellement $a=-\infty$ ou $b=+\infty$. On définit les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

(*i*) $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$

(*ii*) $]a,b[=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$

(*iii*) $]a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a<x\le b\}$

(*iv*) $[a,b[=\{x\in\mathbb{R}|a\le x<b\}$

où, dans cette définition, on considère la chose suivante : $\forall x\in\mathbb{R}, -\infty<x<+\infty$.
Ces parties sont appelées *les intervalles de* $\mathbb{R}$. Les intervalles de la forme $]a,b[$ sont appelés les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et les intervalles de la forme $[a,b]$ sont appelés intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

Remarque. Si $b < a$, on a alors $[a, b] = \emptyset$, et de même pour les autres types d'intervalles.

Remarque. Les intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ sont parfois appelés intervalles semi-ouverts. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont considérés comme des intervalles à la fois ouverts et fermés (ce sont les seuls).

Remarque. On notera $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$, et $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$ ces ensembles privés de 0.

Remarque. On notera parfois, par exemple :

$$\mathbb{N}_{\geq 15} = \{15, 16, 17, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 15\} = [\![15, +\infty[\![.$$

III. Logique

1. Connecteur logiques

Idée. On peut combiner plusieurs propositions pour faire de nouvelles propositions.

Définition 25. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

(*i*) On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition notée "$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$" (et parfois $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$), vraie exactement quand l'une des deux proposition $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie.

(*ii*) On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition notée "$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$" (et parfois $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$), vraie exactement quand les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.

(*iii*) On appelle *négation* de la proposition $\mathcal{P}$ la proposition notée "non $\mathcal{P}$" ou $\neg\mathcal{P}$, qui est vraie exactement quand $\mathcal{P}$ est fausse.

Remarque. En mathématiques, **le connecteur logique "ou" est inclusif**. Autrement dit, si "$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$" est vraie, alors $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie.

Remarque. Les termes de disjonction et de conjonction seront peu utilisés, mais vous devez savoir qu'ils désignent les connecteur logiques "*ou*" et "*et*", que nous utiliserons à foison.

Remarque. Pour bien définir les connecteurs logiques, on peut dresser leur table de vérité. En anticipant sur l'implication et l'équivalence, cela donne :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$false$	$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$true$
$false$	$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$false$
$true$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$

A partir de propositions, on peut maintenant construire de nouvelles propositions.

Exercice 26. Donner, en fonction des valeurs de vérité des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, la valeur de vérité de la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et ($\neg\mathcal{P}$). Vous pourrez vous aider de la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P}$	($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et ($\neg\mathcal{P}$))
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Pouvez vous simplifier cette formule logique?

2. Logique et ensembles

Définition 27. Soient A et B deux ensembles.

(*i*) On appelle *réunion de A et B* l'ensemble noté $A \cup B$ dont les éléments sont ceux de A ou de B. Autrement dit, écrire "$x \in A \cup B$" revient à écrire "$x \in A$ ou $x \in B$".

(*ii*) On appelle *intersection de A et B* l'ensemble noté $A \cap B$ dont les éléments sont ceux à la fois dans A et dans B. Autrement dit, "$x \in A \cap B$" revient à "$x \in A$ et $x \in B$".

(*iii*) Si $A \subset B$, on appelle *complémentaire de A dans B* l'ensemble noté $B \setminus A$ dont les éléments sont les éléments de B qui ne sont pas dans A. Autrement dit, pour $x \in B$, il revient au même d'écrire "$x \in B \setminus A$" et "$x \notin A$".

Remarque. "$x \notin A$" est la négation de "$x \in A$". On peut se servir de cette notation pour **affirmer**, mais pas pour quantifier (on n'écrit jamais "Soit $x \notin A$").

Remarque. Reprenons la définition précédente avec A et B deux ensembles définis par compréhension à partir d'un même ensemble E. On aurait donc des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ paramétrées par E telles que :

$$A = \{x \in E | \mathcal{P}(x)\}$$
$$B = \{x \in E | \mathcal{Q}(x)\}$$

Alors, on observe une compatibilité entre ensembles et logique :

$$A \cup B = \{x \in E | \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)\}$$
$$A \cap B = \{x \in E | \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)\}$$
$$E \setminus A = \{x \in E | \neg \mathcal{P}(x)\}$$

Exercice 28. Expliciter les ensembles suivants :

(*i*) $[-1, 4[\cup [0, 5]$

(*ii*) $[-1, 4[\cap]0, 5[$

(*iii*) $\mathbb{Z} \cap] - \pi, \pi[$

(*iv*) $\mathbb{R}^* \cap] - 10, 12[$.

3. Implication, équivalence

Définition 29. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On définit alors:

(*i*) la proposition $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous,

(*ii*) la proposition $\mathcal{P}$ *équivaut à* $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Autrement dit :

(*i*) Dire que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, c'est dire que **si** $\mathcal{P}$ est vraie, **alors** $\mathcal{Q}$ est vraie (remarquez que si $\mathcal{P}$ est fausse, on ne peut rien dire).

(*ii*) Dire que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie revient à dire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont la même valeur de vérité. Ainsi, $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{P}$ sont deux propositions logiquement égales. C'est très faux pour l'implication, où l'ordre compte.

Remarque. Le symbole $\Rightarrow$ est appelé symbole d'implication, le symbole $\Leftrightarrow$ est le symbole d'équivalence.

Remarque. L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *implication réciproque* de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Remarque. Lorsqu'on sait que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on sait juste que si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ l'est aussi. On ne sait rien de la valeur de vérité de $\mathcal{P}$. Idem pour l'équivalence.

Exercice 30. Donner les implications et les équivalences entre les propositions données, où $x \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

(*i*) "$2x + 1 = x - 1$" et "$x + 2 = 0$",

(*ii*) "$x^2 = 4$" et "$x = 2$",

(*iii*) "$x^2 > 4$" et "$x \leq -2$".

Remarque. Dans l'exercice précédent (*i*), on a démontré :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x + 2 = 0$$

Il y a ici un parenthésage implicite, **n'hésitez pas à ajouter des parenthèses si vous êtes plus à l'aise**. On aurait pu écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ((2x + 1 = x - 1) \Leftrightarrow (x + 2 = 0))$$

On a donc démontré, pour tout réel x, une équivalence entre deux propositions paramétrées par x.

Remarque. Si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une *condition suffisante* pour $\mathcal{Q}$, ou encore que $\mathcal{Q}$ est une *condition nécessaire* pour $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* pour $\mathcal{Q}$ (et réciproquement).

Exercice 31. Que dire de la proposition mathématique : $2 + 2 = 5 \iff 1 + 1 = 0$?

Attention, problème de lecture courante

En mathématique, quand on écrit une équivalence ou une implication (comme "$x \geq 0 \implies e^x \geq 1$"), c'est pour affirmer que *l'implication* (ou l'équivalence) est vraie, et non pas les proposition en questions. Voici par exemple une démonstration tout à fait valable.

Montrons que l'équation $x^2 + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ n'a pas de solutions.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a l'équivalence suivante :

$$x^2 + 1 = 0 \overset{(1)}{\iff} x^2 = -1$$

Or, par théorème, le carré d'un réel est positif : $x^2 \geq 0$. En particulier, $x^2 \neq -1$.
La proposition $x^2 = -1$ est donc fausse. Par l'équivalence (1), $x^2 + 1 = 0$ est fausse, donc x n'est pas solution de l'équation voulue. On a finalement démontré :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

c'est-à-dire : $\boxed{\text{l'équation } x^2 + 1 = 0 \text{ n'a pas de solution réelle}}$.
Dans cette démonstration, l'équivalence utilisée (1) *est vraie mais les propositions qu'elle relie sont fausses. Ce n'est pas un problème, et c'est comme ça qu'on utilise l'équivalence.*

IV. Démonstrations en mathématiques

Remarque. Comme on a commencé à le voir, on peut parfois simplifier des propositions construites à l'aide des connecteurs logiques.

> **Proposition 32.** *Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ des propositions. Alors :*
> *(i)* $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff ((\text{ non } \mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q})$ *(caractérisation de l'implication avec* et *et* non*),*
> *(ii)* $\mathcal{P}$ *ou* $(\mathcal{Q}$ *et* $\mathcal{R}) \iff (\mathcal{P}$ *ou*$\mathcal{Q})$ *et* $(\mathcal{P}$ *ou* $\mathcal{R})$ *(distributivité de* ou *sur* et*),*
> *(iii)* $\mathcal{P}$ *et* $(\mathcal{Q}$ *ou* $\mathcal{R}) \iff (\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q})$ *ou* $(\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{R})$ *(distributivité de* et *sur* ou*).*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il suffit de la vérifier sur une table de vérité. □

Exercice 33. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de cette proposition, simplifier les propositions suivantes.

(i) $x^2 \neq 4$ ou $|x| = 2$,

(ii) $x^2 = 4$ ou $-2 < x < 2$,

(iii) $x^2 = 4$ et $(|x| < 1$ ou $x \geq 2)$.

1. Négation d'une proposition

Remarque. $\neg\neg\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}$: on dit que la négation est involutive.

a) Lois de De Morgan

Les loies de De Morgan permettent de nier un énoncé formulé avec et, ou.

> **Proposition 34.** *Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :*
> *(i)* $\neg(\mathcal{P}$ *ou* $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{P}$ *et* $\neg\mathcal{Q}$*,*
> *(ii)* $\neg(\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{P}$ *ou* $\neg\mathcal{Q}$*.*

Démonstration. faire une table de vérité. □

Exercice 35. Pour comprendre cet énoncé, niez les propositions suivantes définies pour tout réel x.

(i) Ou bien il ne pleut pas, ou bien je prends mon parapluie. Reformulez cette phrase avec une implication.

(ii) Le chat est gris et il fait jour.

(iii) $x > 2$ ou $x < 2$.

(iv) $-2 < x < 2$.

b) Négation d'une implication, d'une équivalence

> **Proposition 36.** *Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Alors,*
>
> $$\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q}.$$
>
> *Autrement dit, une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse si, et seulement si, $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse.*

Remarque. (i) On peut encore le vérifier sur une table de vérité, mais ça doit surtout devenir intuitif.

(ii) Parlons des équivalences. Voici les traductions les plus courantes, en français, de $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

(a) $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour $\mathcal{Q}$,

(b) $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$,

(c) les assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes,

(d) il est équivalent de dire $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Proposition 37. *Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Alors, $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$. Autrement dit, une équivalence est une double implication.*

Remarque. Conséquence : $\neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ ou $\neg(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$. Autrement dit, une équivalence est fausse si et seulement si l'une des implication sous-jacente est fausse.

c) Négation et quantificateurs

Un premier exemple : le contraire de "tous les chats sont gris" est "Au moins un chat n'est pas gris". Le contraire de "tous les moutons ont 4 pattes" est "au moins un mouton n'a pas 4 pattes".

Proposition 38. *Soit $\mathcal{P}$ une proposition paramétrée par un ensemble E. Alors :*

(i) $\neg(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$,

(ii) $\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$.

Exercice 39. Nier les énoncés suivants, puis donner leur valeur de vérité :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x > 0$,

(ii) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 4x + 4 = 0$,

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{x^2}$,

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2}$.

2. Quelques schémas de démonstration

Tous les théorèmes de logique ci-dessous découlent des définitions, ou s'établissent à l'aide d'une table de vérité.

Remarque. Pensez à nier les énoncés qui vous sont donnés, pour changer l'angle d'attaque du problème.

a) Démontrer une implication : la méthode directe

Proposition 40. *Pour démontrer une implication $A \Rightarrow B$, on suppose A vraie et on démontre que B est vraie.*

Exemple 41. Soit x un réel. Démontrons que si $x > 1$, alors $x^2 > 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. *(Une démonstration doit être auto-suffisante et rappeler toutes les notations employées. Sauf, au milieu d'un exo, pour les notations fixées par l'énoncé.)*
Supposons $x > 1$. *(On suppose l'hypothèse vérifiée. Maintenant, on va faire des déductions avec notre base démonstrative)*
Alors, x étant positif, on obtient une nouvelle inégalité en multipliant cette dernière par x : $x^2 > x$. On a donc $x^2 > x > 1$ donc par transitivité, $x^2 > 1$. L'implication est démontrée. □

b) Démontrer une implication : la contraposée

Il est équivalent de dire : "s'il pleut, alors je prends mon parapluie", et "Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas".

Proposition 42. *Pour toute propositions A et B,*

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Définition 43. L'implication $\neg B \Rightarrow \neg A$ est appelée implication contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$.

Remarque. Quand on doit démontrer une implication, on doit toujours se formuler la contraposée, qui peut être plus facile à conceptualiser.

Exercice 44. Pour tout réel x, soit $\mathcal{P}(x)$: si $x^2 \neq 4$, alors $x \neq 2$. Donner la contraposée de $\mathcal{P}(x)$. Un sens vous semble-t-il plus naturel?

c) Démontrer une équivalence

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on a deux possibilités.

(i) La première, et la plus courante, est de démontrer séparément $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

(ii) Sinon, on peut raisonner par équivalence, et trouver une chaine d'énoncés tous équivalents, partant de A et arrivant à B.

Exercice 45. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, que $x > 3 \Leftrightarrow \ln(e^{x-2} + 1) > \ln(1 + e)$.

Exercice 46. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer $a = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon \geq 0, a \leq \epsilon$.

Exercice 47. Montrer que pour tout entier n, n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.

Remarque. Pour démontrer $A \Leftrightarrow B$, on peut donc montrer en deux temps $A \Rightarrow B$ et non$A \Rightarrow$ non$B$ (contraposée de la seconde implication).

d) Le modus ponens

Idée. Derrière ce mot savant se cache l'une des technique les plus ancienne du raisonnement mathématique ou philosophique. Techniquement, vous pouvez y penser comme à une manière générale de faire des étapes dans votre raisonnements.

Proposition 48. *Soit B une proposition. Alors, pour toute proposition A :*

$$(A \text{ et } (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B.$$

Autrement dit, pour démontrer qu'une proposition B est vraie, on peut trouver une proposition A vraie, et démontrer que $A \Rightarrow B$.

Exemple 49. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrons que $x^2 + 1 > 1$.

Démonstration. Pour tout réel x, montrons que $x^2 > 0$. *(C'est la proposition A de l'énoncé.)*
C'est une conséquence directe de la règle des signes. *(cas simple : A est démontré.)*
Montrons maintenant $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1$. *(On va montrer une implication.)*
Supposons $x^2 > 0$. Alors, $x^2 + 1 > 0 + 1$ (on peut ajouter un réel à chaque membre d'une inégalité), donc $x^2 + 1 > 1$. □

Remarque. La démonstration précédente, inutilement découpée pour l'exemple, se démontre de manière plus compacte et naturelle de la manière suivante. C'est toujours un modus ponens, mais enchainé.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la règle des signes, $x^2 > 0$. Or:

$$x^2 > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 + 1 > 1.$$

Par implication, on a bien démontré $x^2 + 1 > 1$. Justification de (1) : on peut ajouter un même réel à chaque membre d'une inégalité pour conserver une inégalité. □

Remarque. J'ai parlé de la notion informelle de base démonstrative : c'est tous les résultats qui sont supposés connus (pour vous : les résultats du chapitre, ou en concours les résultats du programme), vous pouvez vous en servir à n'importe quel moment.

e) Démontrer les propositions quantifiées

Voici les techniques de base pour démontrer des propriétés quantifiées.

(*i*) Pour démontrer un énoncé de la forme $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$:

(a) On introduit une nouvelle variable x (nom au choix) élément de E avec l'une des formule : "Soit $x \in E$", "Considérons $x \in E$" ou si on est très à l'aise : " $\forall x \in E$:" à condition d'écrire la suite en langage mathématique (à éviter cette année).

(b) On cherche à démontrer $\mathcal{P}(x)$. Attention, la seule hypothèse qu'on a sur x est que c'est un élément de E. On ne peut pas du tout choisir x ici, bien au contraire.

(*ii*) Pour démontrer un énoncé de la forme $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$, on peut (et souvent, on doit) trouver un élément $x \in E$ explicite vérifiant $\mathcal{P}(x)$. Autre méthode très contextuelle : avec un raisonnement par l'absurde.

(*iii*) Pour démontrer un énoncé de la forme $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$, on procède en deux étapes.

(a) On montre d'abord l'existence : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$,

(b) on montre ensuite l'unicité : $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y) \Rightarrow x = y$.

Remarque. $(x, y) \in E^2$ signifie $x \in E$, $y \in E$. On dit alors que (x, y) est un couple d'éléments de E. L'ensemble E^2 est l'ensemble des couples d'éléments de E. On reverra ça plus tard.

Exercice 50. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$.

f) Utilisation d'un contre exemple

Pour démontrer qu'une proposition de la forme $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ est **fausse**, on exhibe un contre exemple, c'est-à-dire un élément $x \in E$ explicite tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux.

Remarque. Cela revient à prouver $\exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$, qui est bien la négation de notre énoncé, et à utiliser la méthode du *e*).

Exercice 51. Nier les propositions suivantes et déterminer leur valeur de vérité, avec démonstration.

(*i*) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

(*ii*) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > x, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$.

Remarque. Si x est un réel fixé, on tolère l'écriture $\forall y > x$ qui signifie alors $\forall y \in]x, +\infty[$.

3. Raisonnement par l'absurde, disjonction des cas, analyse-synthèse

a) Le raisonnement par l'absurde

Proposition 52. *Soit $\mathcal{P}$ une proposition. Alors :*

$$(\neg\mathcal{P} \Rightarrow \textit{Faux}) \Rightarrow P.$$

Démonstration. Table de vérité. □

Autrement dit, pour démontrer une proposition $\mathcal{P}$, on peut faire ce qu'on appelle une *démonstration par l'absurde.*

(*i*) On commence par supposer que $\mathcal{P}$ est faux,

(*ii*) on raisonne pour démontrer un énoncé faux, que l'on met en valeur (on parle de contradiction). Ceci démontre:

$$\neg\mathcal{P} \implies \text{Faux}$$

(*iii*) d'après la proposition précédente, cela démontre $\mathcal{P}$.

Remarque. Attention, au début d'une démonstration par l'absurde, on doit indiquer notre intention. Et il est d'usage d'écrire la suite au conditionnel.

Exemple 53. Soient a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 1$. Montrer que l'un de ces réel est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{3}$.

Démonstration. *Supposons par l'absurde que* a, b et c sont tous inférieurs à $\frac{1}{3}$. On *aurait* alors, $a < \frac{1}{3}, b < \frac{1}{3}, c < \frac{1}{3}$. Si on somme ces inégalités, il vient $a + b + c < 1$ ce qui contredit $a + b + c = 1$. *C'est absurde*, d'où le résultat. □

Exercice 54. Supposons qu'il existe des entiers p et q, avec $q > 1$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sous forme irréductible.

(*i*) Montrer que p^2 est pair.

(*ii*) En déduire que p est pair.

(*iii*) En déduire que q est pair. Y a-t-il une contradiction?

(*iv*) Quelle est la conclusion de cet exercice?

b) La disjonction des cas

Proposition 55. *Soit $\mathcal{P}$ une proposition. Alors, pour toute proposition A :*

$$((A \Rightarrow P) \text{ et } (\text{non}A \Rightarrow P)) \Rightarrow P.$$

Ce que dit cette proposition, c'est que pour démontrer une proposition $\mathcal{P}$, on peut choisir une proposition A et démontrer, en deux temps, $A \Rightarrow \mathcal{P}$ puis non$A \Rightarrow P$.

Exemple 56. Montrons que pour tout entier n, $n^2 - n$ est pair.

1e cas : si n est pair. Alors, on peut trouver un entier k tel que $n = 2k$. Il vient alors $n^2 - n = (2k)^2 - 2k = 4k^2 - 2k = 2(2k^2 - k)$. Donc $n^2 - n$ est bien pair.

2e cas : sinon, n est impair. Soit alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Il vient $n^2 - n = (2k+1)^2 - (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1 = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$. On a donc bien $n^2 - n$ pair.

Conclusion: Dans tous les cas, $n^2 - n$ est pair, d'où le résultat voulu. □

Exercice 57. Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.
Rappel (ou pas) : $max(x, y)$ désigne ici le plus grand réel entre x et y. Pour tout réel a, la valeur absolue de a, notée $|a|$, vaut a si $a \geq 0$ et $-a$ sinon.
Indication : Procéder par disjonction des cas, en fonction de si $x > y$ ou non.

c) Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse donne une manière de démontrer les énoncés de la forme

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

(et vous aide à structurer voter recherche de démonstration). On procède alors en deux temps. Comme on l'a déjà vu, les démonstrations de ces énoncés sont découpées "en deux parties" : une partie où l'on cherche à démontrer l'existence (ici, de $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$), puis une partie où l'on cherche à démontrer **l'unicité** d'un tel élément.

Premier temps : l'analyse. Dans l'analyse, on démontre d'abord l'unicité. Pour cela, **on suppose l'existence**, et c'est là la spécificité du raisonnement par analyse-synthèse. A la fin de l'analyse, on espère avoir des conditions qui déterminent exactement le x recherché.

Second temps : la synthèse. Dans la synthèse, on démontre l'existence. Cette partie est très souvent largement facilitée par l'analyse. Cela nous permet de retomber sur nos pattes (vis à vis de l'hypothèse d'existence formulée dans l'analyse) et de clore la démonstration. Vous remarquerez que pour démontrer l'existence, on doit donner un x en chair et en os. Cet x a généralement été trouvé pendant l'analyse, et il faut ici vérifier que ce x convient.

Voici un exemple simple où la structure opère.

Exemple 58. Soit $y \in]0,1[$. Montrons : $\exists! x \in \mathbb{R}, y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

Analyse : Supposons l'existence voulue, et soit alors x un réel tel que $y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Alors:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} &\Rightarrow \frac{1}{y} = 1+\mathrm{e}^x && \text{(car y est non nul)} \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^x = \frac{1}{y} - 1 \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} x = \ln(\frac{1}{y} - 1) \end{aligned}$$

(1) : On peut bien appliquer la fonction ln, car $e^x > 0$ et $y \in]0,1[\implies \dfrac{1}{y} > 1 \implies \dfrac{1}{y} - 1 > 0$, par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+$.
Conclusion de l'analyse: si un tel x existe, alors il vaut $\ln(\dfrac{1}{y} - 1)$.

Synthèse :

Idée. On veut poser $x = \ln(\dfrac{1}{y} - 1)$ pour conclure. On doit s'assurer qu'il n'y a pas de problèmes, puis vérifier qu'il convient bien, c'est-à-dire, en fait, démontrer les implications réciproques de celles utilisées dans l'analyse. Attention à ne pas oublier d'étapes ici.

On a déjà montré dans l'analyse que $\frac{1}{y} - 1 > 0$ (car $y \in]0,1[$). Vu le domaine de définition de la fonction ln, on peut donc bien poser $x = \ln(\frac{1}{y} - 1)$. Alors :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{1}{1+\frac{1}{y}-1} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

On a donc bien démontré l'existence, d'où:

$$\forall y \in]0,1[, \exists! x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 59. Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Analyse Supposons qu'une telle fonction f existe.

(*i*) Montrer, en utilisant l'hypothèse sur f avec des valeurs bien choisies de x et y, que $f(0) \in \{0,1\}$.

(*ii*) A l'aide d'autres valeurs bien choisies de x et de y, montrer que l'on a nécessairement $f(0) = 1$.

(*iii*) Donner l'expression de $f(x)$.

Synthèse

(*iv*) Faire la synthèse, et donner la conclusion de l'exercice.

4. Remarques sur l'utilisation des hypothèses

a) Base démonstrative

La base démonstrative est l'ensemble des résultats que l'on peut utiliser pour faire une démonstration. Au niveau professionnel, il s'agit donc de l'ensemble des résultats mathématiques démontrés par nos pairs, recensés dans les écrits vérifiés par la communauté mathématique. Pour vous, au niveau d'un concours ou d'un exercice, la base démonstrative est constituée des résultats du cours, des hypothèses données dans l'exercice (ou que vous posez pour établir une démonstration), et aussi des résultats des questions précédentes. A cela, on ajoute souvent un certain nombres d'exercices considérés comme classiques, par exemple un entier est pair si et seulement si son carré l'est.

Il faut bien sûr adapter un peu cela au contexte : si un exercice vous demande de démontrer un théorème du cours, vous ne pouvez pas juste dire que le théorème est vrai car il est dans le cours...

Avoir cette notion en tête vous aidera à résoudre des exercices. Au cours de votre recherche, vous devriez vous demander : quels sont les résultats du cours liés au problème ? Mais aussi, comment puis-je utiliser l'hypothèse donnée par l'exercice? Les questions précédentes m'aideraient-elles?

Retenez bien ceci : en CPGE, on ne vous donne pas d'hypothèses inutiles. D'une part, se demander comment exploiter une hypothèse est souvent fructueux. D'autre part, si vous remarquez que vous n'avez pas utilisé une hypothèse dans un exercice, il y a surement une faute quelque part.

b) Utilisation des hypothèses quantifiées

Pour utiliser une hypothèse de la forme $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$, vous devez :

- (i) être en train de manipuler une variable (par exemple notée t) vérifiant $t \in E$,
- (ii) annoncer l'utilisation par une formulation type : "Or, $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$",
- (iii) vous pouvez alors conclure que $\mathcal{P}(t)$ est vraie.

Pour utiliser une hypothèse de la forme $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$, vous devez :

- (i) annoncer l'utilisation par une formule type : "Or, $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$",
- (ii) vous pouvez alors introduire une nouvelle variable $x \in E$ vérifiant $\mathcal{P}(x)$ avec une formulation comme "Soit donc $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$", puis travailler avec.

Pour utiliser une hypothèse de la forme $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$, vous pouvez :

- (i) utiliser l'existence, c'est à dire $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ (point précédent), et
- (ii) utiliser l'unicité donnée par l'énoncé. Pour cela, un moyen courant et d'avoir deux variables $s \in E$ et $t \in E$ vérifiant toute deux la propriété $\mathcal{P}$, et vous pouvez alors conclure $s = t$.
- (iii) Par ailleurs, dans certains cas, on utilise $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ pour définir un élément de manière unique, avec une formule comme : "Soit x l'unique élément de E tel que $\mathcal{P}(x)$".

c) Inclusions et égalités d'ensembles.

Comment démontrer une inclusion ou une égalité d'ensemble ?

Méthode.

Soient A et B deux ensembles. Pour démontrer l'inclusion $A \subset B$, on doit démontrer :

$$\forall x \in A, x \in B.$$

On commence donc par considérer un élément a quelconque de A ("Soit $a \in A$") et on cherche à démontrer que $a \in B$.

Exemple 60. On pose $A = \{(4t+1, t+2) | t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = -7\}$.

Montrons que $A \subset B$.

Méthode.

Soient A et B deux ensembles. Pour démontrer l'égalité $A = B$, on montre en deux temps $A \subset B$ et $B \subset A$ selon la méthode précédente.
Alternativement, on pourra plus tard procéder par chaîne d'équivalence.

Exemple 61. Montrons que, dans l'exemple précédent, $A = B$.

Exercice 62. Montrer que $\{t \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R}_-, t = y^2\} = \mathbb{R}_+$.

V. Le raisonnement par récurrence

C'est une conséquence de la construction de $\mathbb{N}$ (HP+). Vous devez apprendre précisément le modèle de rédaction enseigné, les démonstrations par récurrence sont très courantes.

1. Le principe de récurrence

Proposition 63. *Soit $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une proposition paramétrée par les entiers. Alors :*

$$(P(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, P(n)).$$

Autrement dit, pour démontrer une proposition de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, on peut procéder en deux temps :

(i) L'initialisation *: on démontre $P(0)$.*

(ii) L'hérédité *: on considère un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, et on démontre $P(n) \implies P(n+1)$.*

Exemple 64. Démontrons par récurrence l'énoncé suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque. La récurrence ne s'applique que pour les énoncés quantifiés sur $\mathbb{N}$! N'essayez même pas de démontrer par récurrence un énoncé comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

car ça n'a aucun sens (il n'y a pas d'entier dans l'énoncé...).

Remarque. On peut faire une démonstration par récurrence **à partir de n'importe quel rang** (on peut faire l'initialisation avec un autre entier que 0 si besoin). Par exemple, dans l'exemple ci-dessous, la propriété à démontrer n'est vraie qu'à partir du rang $n = 4$, et on peut donc procéder par récurrence à partir de 4 (on initialise à $n = 4$ et prends, dans l'hérédité, un entier $n \geq 4$).

Exemple 65. Montrons par récurrence : $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$.

Remarque. On n'insiste pas pour rien : vous devez avoir un modèle de rédaction parfait des récurrences dans la peau. Voici les étapes indispensables.

- Annoncer que vous procédez par récurrence.

  Démontrons par récurrence : $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$..

- Donnez un nom à l'hypothèse de récurrence, c'est à dire à la proposition que vous cherchez à démontrer pour tout entier. Guillemets obligatoires.

  Posons, pour tout entier $n \geq 4$, $P(n)$: "$2^n \leq n!$".

- Annoncez l'initialisation, et démontrez la.
- Concluez l'initialisation clairement ("d'où l'initialisation").

- Annoncez l'hérédité.
- Introduisez un entier n quelconque parmi les entiers concernés.

  Soit $n \geq 4$ un entier.
- Démontrez $P(n) \implies P(n+1)$.

  Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$...
- Une fois ceci fait, concluez l'hérédité clairement ("d'où l'hérédité").
- En DS : rajoutez une conclusion à encadrer ("Par récurrence, on a bien montré ...").

Remarque. Dans une démonstration par récurrence, vous devez impérativement mettre en évidence l'utilisation de l'hypothèse de récurrence. Dans l'hérédité, vous démontrez $P(n) \implies P(n+1)$. Pour cela, vous supposez $P(n)$ vrai pour démontrer $P(n+1)$. L'utilisation de l'hypothèse de récurrence, c'est le moment où vous utilisez $P(n)$ dans la démonstration de $P(n+1)$.

Remarque. Le symbole $\sum$ est employé pour décrire des sommes finies d'une longueur donnée (éventuellement "inconnue"). Par exemple, on note :

$$\sum_{k=0}^{2023} k = 0+1+2+3+\ldots+2022+2023$$

$$\sum_{k=0}^{101} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\ldots+100^2+101^2 = 0+1+4+\ldots+10000+10201$$

$$\sum_{k=2}^{7} 2k+1 = (2\times 2+1)+(2\times 3+1)+(2\times 4+1)+(2\times 5+1)+(2\times 6+1)+(2\times 7+1)$$

Et si n est un entier défini auparavant (éventuellement de manière quelconque, avec un "Soit $n \in \mathbb{N}$"), on a par exemple :

$$\sum_{r=0}^{n} 2r = 2\times 0 + 2\times 1 + \ldots + 2n.$$

On fera un chapitre sur ce thème, mais vous pouvez déjà constater :

(*i*) Une somme écrite $\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ possède une borne inférieure n_0 et une borne supérieure n. La borne inférieure doit être plus petite que la borne supérieure,

(*ii*) La "formule" $f(k)$ décrit ce qu'on appelle le terme général de la somme,

(*iii*) La lettre k (appelée variable de sommation) doit ne pas être introduite en amont, et ne fixe aucune notation. On dit que c'est une "variable locale de la somme".

(*iv*) Pour les récurrences, on utilise majoritairement la "formule" :

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) = f(n+1) + \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

2. Variantes de la récurrence

On peut procéder à une récurrence sur plusieurs rangs.

Récurrence sur deux rangs

Pour démontrer un énoncé type "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$" par récurrence sur deux rangs, on adapte la récurrence comme suit :

(i) Initialisation : on démontre le résultat pour les **deux** premiers rangs : on démontre donc ici $P(0)$ et $P(1)$.

(ii) Hérédité : on s'autorise à utiliser l'hypothèse de récurrence sur deux rangs : pour n entier fixé de manière quelconque, on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ et on démontre $P(n+2)$.

Exemple 66. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Remarque. Il n'y a pas de limite à ce principe de récurrence, on peut faire une démonstration par récurrence sur 14 rangs à partir de 100...

La récurrence forte (limite du programme)

Pour démontrer "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence forte, on procède comme par récurrence, mais on adapte l'hérédité.
Dans l'hérédité d'une récurrence forte, on considère un entier $n \in \mathbb{N}$, et on démontre :

$$(P(0) \text{ et } P(1) \text{ et } P(2) \text{ et } \dots \text{ et } P(n)) \implies P(n+1).$$

C'est plus puissant qu'une récurrence, mais on en a rarement besoin.

Exemple 67. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n.$$

Exercice 68. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$.

Exercice 69. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout entier n. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 70. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.