TD de mathématiques n°1 : Logique et raisonnement

Pour commencer

Propositions et quantificateurs

Exercice 1 Pour quelle valeurs de la variable $x \in \mathbb{R}_+^*$ la proposition $\mathcal{P}(x)$: "$\ln(x) > -1$" est-elle vraie?

Exercice 2 *Soyez attentif à ce résultat.* On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la proposition $\mathcal{P}(x)$: "$x = \sqrt{x^2}$".

(*a*) Donner une valeur de x pour laquelle la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

(*b*) Donner une valeur de x pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

(*c*) La proposition $\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathcal{P}(x)$ est-elle vraie?

(*d*) La proposition $\exists x \in \mathbb{R}^*, x = \sqrt{x^2}$ est-elle vraie?

Exercice 3 On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la proposition $\mathcal{P}(x)$: "$x = \dfrac{1}{x}$".

(*a*) Donner une valeur de x pour laquelle la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

(*b*) Donner une valeur de x pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

(*c*) La proposition $\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathcal{P}(x)$ est-elle vraie?

(*d*) La proposition $\exists x \in \mathbb{R}^*, \mathcal{P}(x)$ est-elle vraie?

(*e*) La proposition $\exists! x \in \mathbb{R}^*, \mathcal{P}(x)$ est-elle vraie?

Exercice 4 Vrai ou faux? (Justifier.)

(*a*) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a$.

(*b*) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a$.

(*c*) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a^2$.

(*d*) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a^2$.

Exercice 5 Pour chaque proposition, écrire sa négation puis déterminer sa valeur de vérité.

(*a*) $\mathcal{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$"

(*b*) $\mathcal{Q}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 0$"

(*c*) $\mathcal{R}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \times y = 0$"

(*d*) $\mathcal{S}$: "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \times y = 0$"

Exercice 6 Soit I un intervalle réel non vide, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Nier les énoncés suivants, et les interpréter le plus naturellement possible.

(*a*) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

(*b*) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.

(*c*) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.

(*d*) $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 7 Soit I un intervalle réel non vide, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.

(*a*) f est la fonction nulle.

(*b*) La fonction f s'annule.

(*c*) La fonction f ne s'annule que sur $\mathbb{R}_+$.

(*d*) La fonction f s'annule au moins deux fois.

(*e*) La fonction f s'annule au plus une fois.

(*f*) La fonction f coïncide avec l'exponentielle sur I.

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter les pointillés suivants en utilisant $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ (en justifiant) :

(a) $x \geq 1 \ldots\ldots x > 0$

(b) $0 \leq x \leq 1 \ldots\ldots 0 \leq 1-x \leq 1$

(c) $x^2 = 0 \ldots\ldots x = 0$

(d) $x^2 > 0 \ldots\ldots x > 0$

(e) $x \in [-1,1] \ldots\ldots x \in [-2,2]$

(f) $x \in [-1,1] \ldots\ldots -x \in [-1,1]$

Exercice 9 Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_+$ et $d \in \mathbb{R}_+$. Compléter, si possible, les pointillés suivants en utilisant $\Longrightarrow, \Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ (en justifiant) :

(a) $a = b \ldots\ldots a^2 = b^2$

(b) $a \leq b \ldots\ldots a^2 \leq b^2$

(c) $c = d \ldots\ldots c^2 = d^2$

(d) $c \leq d \ldots\ldots c^2 \leq d^2$

Exercice 10 Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les propositions $\mathcal{P}(x)$: " $\forall y > 0, x \leq y$ " et $\mathcal{Q}(x)$: " $x \leq 0$ ".

Montrer que $\mathcal{P}(x) \Longrightarrow \mathcal{Q}(x)$ (on pourra raisonner aussi bien par contraposée que par l'absurde). Les propositions $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ sont-elles équivalentes?

Méthodes de raisonnement

Exercice 11 Démontrer l'égalité ensembliste :

$$\{(t+1, t-1) | t \in \mathbb{R}\} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u - v - 2 = 0\}.$$

Exercice 12 On pose $A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ et $B = \{(t, \sqrt{1-t^2}) | t \in [0,1]\}$.

(a) Justifier que B est correctement défini.

(b) Démontrer que $A = B$.

Exercice 13 Étant donnée une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on considère les propositions suivantes :

$$P : \text{“}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 0\text{”}$$

et

$$Q : \text{“}\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}, u_n = 0\text{”}.$$

(a) Donner un exemple de suite u pour laquelle P est vraie, puis un exemple de suite pour laquelle P est fausse. Même question pour Q.

(b) Montrer que, pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, P et Q sont équivalentes.

Exercice 14 À l'aide d'une disjonction des cas, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 Montrer que pour tout entier naturel $n, n^2 - n$ est pair.

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est un multiple de 3 , alors n est un multiple de 3.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$. On dit que n et m sont de même parité si : n et m sont pairs, ou bien n et m sont impairs. Montrer que si $n^2 + m^2$ est impair, alors n et m ne sont pas de même parité. Y a-t-il équivalence?

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition $\mathcal{P}$: “$\exists p \in \mathbb{N}, n = p^2$” est vraie. Montrer que la proposition $\mathcal{Q}$: " $\exists q \in \mathbb{N}, 2n = q^2$" est fausse, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice 19 Montrer que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 20 *La quantité conjuguée.* Démontrer par une chaine d'équivalence correctement justifiée que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}.$$

Exercice 21 *Thème très classique : inégalités entre les moyennes harmoniques, géométriques et arithmétiques.* Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Exercice 22 Montrer en raisonnant par équivalence que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}, \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac + bd)^2 \Longleftrightarrow ad = bc$$

Exercice 23

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

(b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $c \in \mathbb{R}_+^*, (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Exercice 24 Résoudre l'équation $\sqrt{2-x} = x$ à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse.

Exercice 25 Résoudre les équations et inéquations suivantes en raisonnant si besoin par disjonction de cas.

(a) $\sqrt{x+5} = x+3$

(b) $\sqrt{x^2-1} \leq x-1$

(c) $\sqrt{x^2-x-2} = -x$

(d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 1$

Pour continuer

Propositions et quantificateurs

Exercice 26 Pour quelle valeurs de la variable $x \in \mathbb{R}$ la proposition $\mathcal{P}(x)$: "$x^2 = x$" est-elle vraie?

Exercice 27 Pour chaque proposition ci-dessous, écrire sa négation puis déterminer si elle est vraie ou fausse.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.

(c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$.

(e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, x = y^2$.

(f) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > x, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$.

(g) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

(h) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, n < x < n+1$.

Exercice 28 *(+)* Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les propositions $\mathcal{P}(x)$: " $\forall y > 0, -y \leq x \leq y$" et $\mathcal{Q}(x)$: "$x = 0$". Montrer que $\mathcal{P}(x) \Longrightarrow \mathcal{Q}(x)$ (on pourra raisonner aussi bien par contraposée que par l'absurde). Les propositions $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ sont-elles équivalentes?

Exercice 29 *(+)* Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x^2 \leq \varepsilon\right) \Longrightarrow x = 0$.

Méthodes de raisonnement

Exercice 30 Montrer que pour tout entier naturel $n, n^3 - n$ est multiple de 3.

Exercice 31 Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 32 Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 33 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer en raisonnant par équivalence que : $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en raisonnant par équivalence que : $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n}$.

Exercice 35 *(+)* Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin \mathbb{Q}$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad \neq bc$. Montrer que $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 36 *(+)* Montrer que : $\forall x \in]0,1\left[, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \right] x-\alpha, x+\alpha[\subset]0,1[$ (on pourra distinguer des cas).

Exercice 37 Résoudre les inéquations suivantes en raisonnant par disjonction de cas.

(a) $\dfrac{2x+1}{x-1} > 2$

(b) $\dfrac{x-3}{3x+1} \leq \dfrac{x}{x-1}$

(c) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1} > 1$

Exercice 38 Résoudre les équations et inéquations suivantes en raisonnant si besoin par disjonction de cas.

(a) $\sqrt{x+2} \geq x$

(b) $\sqrt{x+6} = x$

(c) $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$

(d) $\sqrt{2-x} < x$

(e) $\sqrt{x^2-x-2} < -x$

(f) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 2$