Annexe : chapitre 0

*Le **10 septembre 20024**.*

Quelques exercices supplémentaires

Enoncé

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = x$.
2. Résoudre les équations :
   (a) $|4-2x| \leq 8$.
   (b) $|x^2-1| > 2$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre (en fonction de m) l'équation $x^2 + x + m(x-1) = 0$ d'inconnue réelle x.
4. (a) Résoudre l'équation $x^4 - x^2 - 2 = 0$.
   (b) Résoudre l'équation $x - \sqrt{x} - 2 = 0$.
5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre (en fonction de m) l'équation (E) : $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = m$, d'inconnue réelle x.

Corrigé partiel

1. Notons (E) l'équation $\sqrt{x+1} = x$ d'inconnue réelle x, et D son domaine.

   Soit x un réel.

   $\sqrt{x+1}$ est bien défini si et seulement si $x+1 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq -1$. Ainsi, $D =]-1, +\infty[$.

   Résolvons maintenant (E).

   Soit $x \in D$.

   Idée : Sur le brouillon, on veut vraiment mettre cette égalité au carré pour faire disparaitre la racine. Malheureusement, on n'obtient pas une égalité équivalente en mettant une égalité au carré en toute généralité (il faut pour cela que les deux membres aient le même signe). On utilise donc une disjonction des cas, pour traiter séparément le cas problématique (il faut se rendre compte ici qu'on le peut).

   1e cas : Si $x \geq 0$.

   Dans ce cas, par croissance *stricte* de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et vu que $x \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = x &\iff (\sqrt{x+1})^2 = x^2 \\ &\iff x+1 = x^2 \\ &\iff x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

   .

   Enfin, le polynôme $X^2 - X - 1$ admet pour discriminant $5 > 0$ donc ses racines sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Attention, ici on cherche les solutions positives de (E).

   Enfin, il est clair que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0$ (comme somme puis quotient de nombres positifs). D'autre part, $\sqrt{5} > 1$ (car $5 > 1^2$) donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

   Finalement, x est solution de (E) si et seulement si $x = x_1$ ou $x = x_2$, si et seulement si $x = x_1$ (car $x \geq 0$ et $x_2 < 0$ montre $x \neq x_2$.)

   Conclusion partielle : l'unique solution positive de (E) est x_1 (on a bien $x_1 \in D$).

   2e cas : Sinon, $x < 0$.

   Dans ce cas, l'égalité $\sqrt{x+1} = x$ est fausse car $x < 0$ et $\sqrt{x+1} > 0$. Donc x n'est pas solution de (E).

   Conclusion partielle : (E) n'admet pas de solutions négatives.

   Conclusion : on a donc montré que l'unique solution de (E) est $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. (a) Notons (E_1) l'inéquation définie sur $\mathbb{R}$ par $|4-2x| \leq 8$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned} |4-2x| \leq 8 &\iff -8 \leq 4x - 2 \leq 8 && (1) \\ &\iff -6 \leq 4x \leq 10 && (2) \\ &\iff -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} && (3) \end{aligned}$$

   (car $4 > 0$).

   Donc l'ensemble des solutions de (E_1) est $[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

(b) Notons $(E_2) : |x^2-1| > 2$ l'inéquation considérée, d'inconnue réelle x et définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par équivalence :

$$\begin{aligned}
|x^2-1| > 2 &\iff x^2-1 < -2 \text{ ou } x^2-1 > 2 && (4)\\
&\iff x^2 < -1 \text{ ou } x^2 > 3 && (5)\\
&\overset{(1)}{\iff} x^2 > 3 && (6)\\
&\iff x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}. && (7)
\end{aligned}$$

(1) : Tout carré est positif, donc $x^2 < -1$ est faux.

Attention à la dernière équivalence, classique mais meurtrière dans les DS (beaucoup d'élèves oublient $x < -\sqrt{3}$).

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est }]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[.}$

3. *C'est une équation polynomiale du second degré, rien de plus.*

Notons (E) l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par $x^2+x+m(x-1)=0$ *(m est fixé par l'énoncé).*

On peut réécrire (E) : $x^2+(m+1)x-m=0$ qui est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est $\Delta = (m+1)^2+4m = m^2+6m+1$. Étudions son signe.

Le polynôme X^2+6X+1 admet pour discriminant $\Delta' = 32$ donc admet pour racines $m_1 = \dfrac{-6-\sqrt{32}}{2} = -3-2\sqrt{2}$ et $m_2 = -3+2\sqrt{2}$. Son coefficient dominant étant positif, ce polynôme est strictement négatif sur $[m_1, m_2]$ (car $m_1 < m_2$ car $2\sqrt{2} > 0$), nul en m_1 et m_2, et strictement positif sinon *(il m'arrive de ne pas faire de tableau de signes dans mes corrections car ils sont pénibles à taper, mais, à la main, n'hésitez pas).*

Reprenons la résolution de (E).

1e cas : Si $m \in [m_1, m2]$. Dans ce cas, $\Delta < 0$ donc l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2e cas : Si $m = m_1$ ou $m = m_2$. Dans ce cas, $\Delta = 0$ donc (E) admet une unique solution : $-\dfrac{m+1}{2}$.

3e cas : Sinon, $m \in]-\infty, m_1[\cup]m_2, +\infty[$. Dans ce cas, $\Delta > 0$ donc (E) admet deux solutions (distinctes):

$$x_1 = \frac{-(m+1)-\sqrt{m^2+6m+1}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(m+1)+\sqrt{m^2+6m+1}}{2}.$$

Conclusions :

- Si $m \in]-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}[$, alors (E) n'admet pas de solutions.
- Si $m = -3-2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E) est $-\dfrac{-3-2\sqrt{2}+1}{2} = 1+\sqrt{2}$.
- Si $m = -3+2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E) est $1-2\sqrt{2}$.
- Sinon, (E) admet deux solutions distinctes : $\dfrac{-(m+1)-\sqrt{m^2+6m+1}}{2}$ et $\dfrac{-(m+1)+\sqrt{m^2+6m+1}}{2}$.

— *fin* —