

## Programme de colle n° 1 : Logique, ensembles et raisonnements.

Semaine du lundi 16 septembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

### Chapitre 0 : Équations, inéquations.

**1.1** Notion d'équation, d'inéquation, d'inconnue, domaine de définition d'une équation ou d'une inéquation. Exemples de justifications à donner pour la détermination d'un domaine de définition.

**1.2** Notions de solutions, d'ensemble des solutions. Résolution d'une équation ou inéquation, modèles de rédactions.

**1.3** Premiers théorèmes propres à la résolution d'équations ou d'inéquations (obtention d'une égalité équivalente en ajoutant un même réel aux deux membres d'une égalité, règles relatives au produit, utilisation de fonctions strictement monotones, règle du produit nul, règle des signes et tableaux de signes, méthode du discriminant pour les (in)équations polynomiales du second degré).

**1.4** Les élèves doivent profiter de cette période de rentrée pour s'entraîner à calculer sans fautes avec fractions, puissances, les règles de distributivité, et les propriétés dites "de morphisme" de l'exponentielle et du logarithme.

### Logique, langage mathématique et raisonnements

**1.5** Premières notions de théorie des ensembles : ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , ensemble vide, appartenance et symboles  $\in$ ,  $\notin$ . Inclusion d'ensembles, notions de sous ensemble, de partie. Représentation de situations à l'aide de diagrammes de Venn.

**1.6** Lecture des quantificateurs :  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\exists!$ .

**1.7** Notion (relativement informelle) de proposition. Proposition à paramètres. Construction de propositions à l'aide des quantificateurs et de propositions à paramètres.

**1.8** Définition d'ensembles en extension, en compréhension. Intervalles réels. Notations  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_+^*$ , etc., notations  $\mathbb{N}_{\geq 2}$  (par exemple) et  $\llbracket 2, +\infty[$ .

**1.9** Connecteurs logiques : ou, et, non, définis à l'aide de tables de vérité. Réunion, intersection et différence ensembliste. Lien avec les connecteurs logiques pour des ensembles définis en compréhension comme parties d'un même ensemble (élèves : remarque suivant la définition 27).

**1.10** Connecteurs logiques : implication, équivalence (définis à l'aide de tables de vérité). Affirmer une équivalence  $P \iff Q$  n'affirme pas que les propositions  $P$  et  $Q$  sont vraies.

**1.11** Caractérisation de l'implication à l'aide des connecteurs "ou" et "non". Distributivités entre "ou" et "et". Négation d'une proposition : lois de De Morgan, négation d'une implication, d'une équivalence. Négations d'énoncés quantifiés.

**1.12** Démonstration d'une implication : méthode direct, implication contraposée. Utilisation du *modus ponens*. Considérations naturelles à effectuer dans l'optique de démontrer des propositions avec quantificateurs. Utilisation de contre exemples. Raisonnements par l'absurde.

### Python

**1.13** Pas au programme de cette semaine.

*La détermination du domaine de définition fait partie des attentes d'une résolution d'(in)équation, dans le cas où celui-ci n'est pas donné par l'énoncé.*

*Ces compétences seront testées tout du long de la colle.*

*Les élèves sont prévenus : le symbole  $\notin$  n'est jamais utilisé pour quantifier. On parlera de démonstrations d'égalités ensemblistes lundi.*

### Quelques questions de cours

1. Résoudre l'équation  $(E) : \frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{2}x + 2$ . Toute variante similaire possible, au choix de l'interrogation (les interrogateurs et interrogatrices sont invitées à changer l'énoncé sans trop modifier la difficulté).
2. Résoudre l'équation  $(E) : \ln(x + \frac{1}{x}) = \ln(3)$ . Toute variante similaire possible.
3. Résoudre l'inéquation  $(E) : \frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ . Toute variante similaire possible.
4. Résoudre l'inéquation  $(E) : \ln(\ln(x)) > 0$ . Toute variante similaire possible.
5. Résoudre l'inéquation  $\ln(\frac{2x+1}{x} - 1) > 1$ .
6. Résoudre  $|x - 1| = |x + 1|$ , toute variante similaire possible.
7. Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre l'équation  $mx^2 - 2mx + 2 = 0$ , d'inconnue réelle  $x$ , en fonction de  $m$ .
8. Définir les trois connecteurs logiques suivants à l'aide d'une table de vérité (au choix de l'interrogation).
9. Donner la contraposée de l'implication suivante : (au choix de l'interrogation dans la limite du raisonnable).
10. Énoncer et démontrer les lois de De Morgan et la caractérisation de l'implication à l'aide des connecteurs "ou" et "non".
11. Montrer que, pour tout entier relatif  $n$ ,  $n$  est pair si et seulement si  $n^2$  est pair.