Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions réelles de la variable réelle.

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Notion de fonction réelle de la variable réelle.

1. Définition

Définition 1. Une fonction réelle de la variable réelle f est la donnée :

(i) d'une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ appelée *ensemble de définition* de f, et

(ii) pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, d'un réel $f(x)$ appelé *image* de x par la fonction f.

On note alors $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Remarque. On parlera de "fonction réelle" plutôt que de la formule plus longue de "fonction réelle de la variable réelle".

Remarque. On définira la notion plus générale d'*application* dans le chapitre "Ensembles et applications".

Remarque. "$\left| \begin{array}{lcl} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$" se lit : "la fonction de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$".

Remarque. Remarquez que les flèches ne sont pas typographiées de la même manière, c'est important. "$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$" se lit "la fonction f, de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$", alors que "$f : x \mapsto x^2$" se lit "la fonction f, qui à x associe x^2".

Remarque. En général, l'image $f(x)$ d'un réel $x \in \mathcal{D}_f$ est donné par une formule, mais la seule chose qui importe est qu'il soit bien défini de manière unique pour chaque tel x.

Remarque. Le grand trait vertical n'est pas obligatoire, mais indique que les deux lignes écrites sont à considérer sur la même ligne de texte.

Exemple 2. La fonction réelle $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est donnée par : son ensemble de définition $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x, son image qui est ici le réel x^2. En donnant une formule, on donne un réel (ici, x^2) pour chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 3. La fonction réelle $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ admet $\mathbb{R}$ pour ensemble de définition. L'image d'un réel x est x si celui-ci est positif, et $-x$ sinon. Autrement dit, vous connaissez déjà cette fonction, il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

qu'on appelle la fonction valeur absolue.

Remarque. Pour définir et nommer une fonction réelle, on peut écrire par exemple : " Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ ". Pour pouvoir faire cela, il faut que le réel donné comme image, ici $\sqrt{x}$, soit bien défini et de manière unique pour tout x du domaine de définition. On dit alors que la fonction est *bien définie.*

Comprenez que si vous écrivez $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$, vous commettez une faute (la fonction n'est pas bien définie car $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens, et -1 est un élément du domaine de définition donné).

Remarque. Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions réelles de $\mathcal{D}$ vers $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction valeur absolue est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et la fonction racine carré appartient à $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.

Définition 4. Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}_f$. On dit que x *est un antécédent de* y *par* f si $f(x) = y$.

Exemple 5. On a $(-2)^2 = 4$ donc -2 est un antécédent de 4 par la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.

Définition 6. Soit r un réel. On appelle *fonction constante de valeur* r (ou fonction constante égale à r) la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & r \end{array} \right.$. La fonction constante égale à 0 est appelée *la fonction nulle.*

Remarque. On note souvent $\bar{r}$ la fonction constante égale à r, mais on doit introduire la notation ("Soit $\bar{r}$ la fonction constante égale à r") car cette barre est utilisée dans d'autres contextes.

2. Fonctions données par une formule.

On peut se donner une fonction en donnant simplement une formule, c'est à dire une expression donnant les images des réels. Exemple :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction donnée par } f(x) = \sqrt{x-1}.$$

Par contre, à ce stade la définition de f est incomplète car le domaine de définition n'est pas donné. Ainsi, dans ce cas, *la première chose à faire est toujours de déterminer le domaine de définition sous-entendu pour* f.

Ce domaine de définition à déterminer est alors l'ensemble des réels x tels que l'expression donnée soit bien définie. Aucun mot de l'exemple ci-dessous n'est inutile (à part, peut être, le "réel" entre parenthèse).

Exemple 7. Considérons la fonction (réelle) f donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminons le domaine de définition de f. Pour tout réel x, l'expression $\sqrt{x-1}$ est bien définie si et seulement si $x - 1 \geq 0$. Or :

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1.$$

La fonction f est donc définie sur $[1, +\infty[$.

Remarque. Pour mener à bien ce moment, vous devez donc avoir bien en tête les "opérations interdites", comme pour les domaines des équations et inéquations.

Remarque. La notion "lycéenne" d'opération interdite disparait maintenant. On dira plutôt :

- la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet pour domaine de définition $\mathbb{R}_+$ (d'après le cours),
- donc pour tout réel x, $\sqrt{x-1}$ est bien défini si et seulement si $x - 1 \in \mathbb{R}_+$, si et seulement si $x \geq 1$,
- donc $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ a pour domaine de définition $[1, +\infty[$.

Exemple 8. Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Exemple 9. La formule $g(x) = \ln(1-x)$ définie une fonction $g :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$.

Exemple 10. Déterminons le domaine de définition de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Exercice 11. Donner le domaine de définition de la fonction réelle f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1})$.

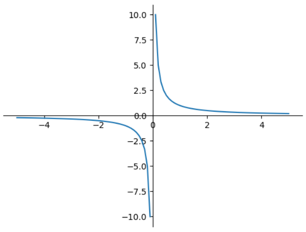
3. Graphe d'une fonction.

Définition 12. Soit f une fonction réelle. Notons $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. On appelle *graphe de la fonction* f la partie de $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{R} | f(x) = y\}.$$

Remarque. Γ_f est donc l'ensemble des couples (x, y) de réels tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = y$.

On peut alors représenter graphiquement une fonction. Dans un repère représentant $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des points du graphe Γ_f d'une fonction f forment ce qu'on appelle une courbe. Voici par exemple la représentation graphique de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



II. Quelques propriétés des fonctions réelles.

Les propriétés des fonctions réelles peuvent "ne pas être globales", mais "localisées" **sur** une partie de leur domaine. Par exemple, la fonction (donnée par) $x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$, mais elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. On utilisera donc le vocabulaire suivant:

Définition 13. Soit f une fonction réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que f est *définie en* x si : $x \in \mathcal{D}$.
Autrement dit, f est définie en x ssi $f(x)$ est un réel bien défini.

(ii) Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f *est définie sur* I si $I \subset \mathcal{D}$.
Autrement dit, on dit que f est définie sur I si $f(x)$ est un réel bien défini pour tout $x \in I$, ou de manière équivalente, si f est définie en x pour tout $x \in I$.

Exemple 14. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet $\mathbb{R}^*$ comme domaine de définition. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$, car f n'est pas définie en 0.

Remarque. On utilise le mot "point" pour désigner un réel que l'on pense comme à un élément de l'ensemble de définition, et le mot "valeur" pour désigner un réel que l'on pense comme élément de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Remarquez l'utilisation de la préposition "en" lorsque l'on parle de points, et "sur" lorsque l'on parle d'ensembles de points. C'est très général.

1. Fonctions monotones, lien avec les équations et d'inéquations

Remarque. Cette partie est mathématiquement instructive et très utilisée dans l'année. Insistez jusqu'à bien comprendre l'enchainement des énoncés (définitions, propositions, méthodes...).

a) Fonctions monotones et strictement monotones

Définition 15. Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I.

(*i*) On dit que f est *croissante sur* I si :
$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

(*ii*) On dit que f est *décroissante sur* I si :
$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

(*iii*) On dit que f est *monotone sur* I si elle est croissante ou décroissante sur I.

Exemple 16. La fonction donnée par $x \mapsto x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ie la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right)$, est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Démontrons par exemple sa décroissance sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple 17. Les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes sur $\mathbb{R}$ (faire la démonstration de tête). Réciproquement :

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors, f est constante.

Remarque. Si on ne précise pas de partie I de $\mathbb{R}$ quand on parle de fonction monotone, il est sous-entendu : monotone sur tout son ensemble de définition. On peut donc dire que la fonction racine carré est croissante (sous entendu, sur son domaine $\mathbb{R}_+$), mais habituez-vous plutôt à toujours préciser "le lieu" de croissance.

Exemple 19. Dans cet énoncé, I est une partie quelconque de $\mathbb{R}$ (pas forcément un intervalle). En revanche, il faut faire très attention aux fautes que l'on pourrait commettre lorsqu'on utilise ces notions de monotonie sur des parties qui ne sont pas des intervalles. Prenons cet exemple typique.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet $\mathbb{R}_+^*$ comme domaine de définition (ce n'est pas un intervalle...). Cette fonction est décroissante sur chaque intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, mais **n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.** En effet, $-1 \leq 1$ mais "$f(-1) \geq f(1)$" est faux, donc la propriété de décroissance n'est pas vérifiée sur $\mathbb{R}^*$.

Définition 20. Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I.

(*i*) On dit que f est *strictement croissante sur* I si :
$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y).$$

(*ii*) On dit que f est *strictement décroissante sur* I si :
$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y).$$

(*iii*) On dit que f est *strictement monotone sur* I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Exemple 21. La majorité de vos "fonctions usuelles" monotones sont strictement monotones. Par contre, il y a une exception notable : **la fonction partie entière** est croissante sans être strictement croissante (voir plus bas).

Proposition 22. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. Toute fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Démonstration. À noter. □

Intéressons nous maintenant aux implications réciproques de celles données dans les définitions ci-dessus.

Proposition 23. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*

(i) Si f est croissante sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) < f(y) \implies x < y.$$

(ii) Si f est décroissante sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) < f(y) \implies x > y.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Ici, on ne fait que l'hypothèse que f est monotone, mais on ne peut pas conclure au même résultat avec des inégalités larges. Par exemple, prenons pour f la fonction nulle. Elle est bien croissante (et aussi décroissante). L'inégalité

$$f(x) \leq f(y)$$

est vraie pour tous réels x et y (car il y a égalité). L'énoncé

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y.$$

est donc faux (prendre $x = 1$ et $y = -1$ comme contre exemple).

Par contre, pour les fonctions strictement monotones, tout se passe pour le mieux.

Proposition 24. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*

(i) Si f est strictement croissante sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y.$$

(ii) Si f est strictement décroissante sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) \leq f(y) \implies x \geq y.$$

Démonstration. À noter. □

La conclusion (majeure) de tous ces énoncés, pour les fonctions strictement monotones, est alors la suivante. Tout se passe pour le mieux.

Proposition 25. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*

(i) Si f est strictement croissante sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

et :

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \iff f(x) < f(y)$$

(ii) Si f est strictement décroissante sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

et :

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \iff f(x) > f(y)$$

Démonstration. À noter. □

b) Utilisation pour la résolution d'inéquations

Méthode : Dans le cadre de la résolution d'une inéquation, on peut appliquer une fonction monotone sur un intervalle convenable à une inégalité et...

- obtenir une inégalité équivalente si la fonction appliquée est strictement monotone (prop. 25)

- obtenir une condition nécessaire si la fonction appliquée n'est que monotone (définition de la monotonie).

De plus, la proposition 23 peut être utilisée, mais c'est beaucoup plus rare.

Exemple 26. Résolution de $e^{x+1} > 1$, avec la proposition 24.

Remarque. Quand on utilise la proposition 25 pour établir une équivalence type :

$$a \leq b \iff f(a) \leq f(b),$$

il en faut pas oublier d'argumenter en :

(i) Trouvant un intervalle I sur lequel la fonction appliquée f est strictement monotone (croissante dans cet exemple), puis

(ii) vérifiant que $a \in I$ et $b \in I$.

Voici un exemple montrant bien le problème pour les fonctions non strictement monotones.

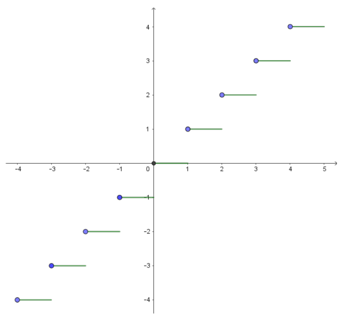
Exemple 27. La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, définie sur $\mathbb{R}$, est croissante. Soient x et y des réels. Quels liens de causalité avons-nous entre les énoncés suivants?

(i) $x < y$

(ii) $x \leq y$

(iii) $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

(iv) $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$



c) Utilisation pour la résolution d'équations

Pour les équations, où l'on ne manipule pas des inégalités mais des égalités, il faut travailler un tout petit peu plus. L'optique est toujours la même : se permettre d'appliquer une fonction dans le cadre de la résolution d'une équation. La bonne notion est la suivante.

Définition 28. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle définie sur I. On dit que f *est injective sur* I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Remarque. En particulier, si f est injective sur I, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, f(x) = f(y) \iff x = y.$$

En effet, le sens manquant ("$x = y \implies f(x) = f(y)$") est évident.

La notion de fonction injective est donc la bonne pour justifier, lors de la résolution d'une équation, un passage type :

$$a = b \iff f(a) = f(b).$$

La majorité du temps, on utilisera la stricte monotonie.

Proposition 29. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction (définie et) strictement monotone sur I. Alors, f est injective sur I.*

Démonstration. À noter. □

Exemple 30. Résolution de l'équation $e^{x+1} = 1$.

Remarque. Comme pour les inéquations, pour justifier une application de fonction strictement monotone sur un intervalle I, on n'oubliera pas de spécifier I et de vérifier que les deux membres de l'égalité sont éléments de I.

Exemple 31. L'équivalence $-1 = 1 \iff (-1)^2 = 1^2$ est fausse. La fonction carré est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, mais "$(-1,1) \in \mathbb{R}_+^2$" et "$(-1,1) \in \mathbb{R}_-^2$" sont deux énoncés faux.

2. Parité, imparité d'une fonction

Les fonctions paires (resp. impaires) sont les fonctions dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'origine).

Remarque. Algébriquement, une fonction f de domaine $\mathcal{D}$ est paire si $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$, et impaire si $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$.

Dessin à noter.

Pour qu'on ait simplement le droit d'écrire cela, il faut que $f(-x)$ soit bien défini dès que $f(x)$ l'est, d'où la définition suivante.

Définition 32. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que D est *symétrique par rapport à* 0 (ou par rapport à l'origine) si :

$$\forall x \in D, -x \in D.$$

Exemple 33. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ sont symétrique par rapport à l'origine. $]2,+\infty[$ et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ne le sont pas.

Définition 34. Soit f une fonction réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

(*i*) On dit que f est *paire* si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, et si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x).$$

(*ii*) On dit que f est *impaire* si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, et si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x).$$

Remarque. "paire" : on perd le "-", "impaire" : on ne le perd pas.

Exemple 35. Les fonctions suivantes sont-elles paire ou impaire?

(*i*) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

(*ii*) $x \mapsto x^3 + 1$

(*iii*) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 36. *(i) Soit f une fonction paire. Alors, le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in \Gamma_f \iff (-x,y) \in \Gamma_f.$$

(ii) Soit f une fonction impaire. Alors, le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à l'origine :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in \Gamma_f \iff (-x,-y) \in \Gamma_f.$$

Démonstration. En exercice. □

Voici un résultat très classique sur les fonctions paires et impaires.

Exercice 37. Par analyse synthèse, démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors il existe d'uniques fonctions f_P et $f_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = f_P + f_I$ avec f_P paire, f_I impaire.

3. Fonctions bornées

Définition 38. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $I \subset \mathcal{D}$.

(*i*) On dit que f est *majorée sur I* si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Dans ce cas, on appelle *majorant de f sur I* tout réel M tel que : $\forall x \in I, f(x) \leq M$.

(*ii*) On dit que f est *minorée sur I* si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq f(x).$$

Dans ce cas, on appelle *minorant de f sur I* tout réel m tel que : $\forall x \in I, m \leq f(x)$.

(*iii*) On dit que f est *bornée sur I* si f est à la fois majorée et minorée sur I.

Remarque. Si aucun domaine I n'est précisé (par exemple, "montrer que f est majorée"), on sous entends que la propriété est vraie sur tout le domaine de définition de la fonction (l'exemple devient "montrer que f est majorée sur son domaine de définition".

Exemple 39. Dessins à noter.

Remarque. Attention, une fonction majorée (ou minorée) a beaucoup de majorants (ou de minorants), et il n'y a jamais d'unicité. Pour cette raison, la tournure de phrase "-1 est LE minorant de f" est fausse (on écrira toujours "-1 est UN majorant de f").

Proposition 40. *Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. La fonction f est bornée sur I si et seulement si :*

$$\exists M \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

Démonstration. En annexe. □

4. Extrema

Définition 41. Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}$. Soit $x_0 \in I$.

(*i*) On dit que f admet un *maximum en x_0 sur I* si:

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0).$$

On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I.

(*ii*) On dit que f admet un *minimum en x_0 sur I* si:

$$\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x).$$

On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I.

(*iii*) On dit que f admet un extremum en x_0 sur I si elle admet un maximum ou un minimum en x_0. Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est un extremum de f sur I.

Exemple 42. Quels sont les extrema de la fonction $t \to t^2$ sur $\mathbb{R}$?

Remarque. Le pluriel d'extremum est "extrema".

Remarque. Un maximum (resp. minimum) de f sur I est donc un majorant (resp. un minorant) de f sur I qui est une valeur atteinte par la fonction f (ie, qui admet un antécédent par f).

Remarque. On verra aussi la notion importante d'extremum local plus tard dans l'année.

Exemple 43. Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{array} \right.$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Admet-elle un minimum? Le démontrer. Sans démonstration, admet-elle un maximum?

Remarque. Une fonction admettant un minimum est minorée, et de même une fonction admettant un maximum est majorée. La réciproque est fausse : l'exponentielle est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ mais n'admet pas de minimum.

Remarque. Encore une fois, si aucun domaine I n'est précisé, on prendra pour I l'ensemble de définition de la fonction considérée.

III. Opérations sur les fonctions réelles

1. Addition, produit, quotient et multiplication scalaire

Définition 44. Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions réelles de domaine de définition $\mathcal{D}$.

(*i*) On appelle *somme de f et g* la fonction notée $f+g$ donnée par :

$$f+g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}.$$

(*ii*) On appelle *produit de f et g* la fonction notée $f \times g$ donnée par :

$$f \times g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}.$$

(*iii*) Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on appelle *quotient de f par g* la fonction notée $\dfrac{f}{g}$ donnée par :

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}.$$

(*iv*) Pour tout réel λ, on appelle multiplication scalaire de f par λ la fonction notée $\lambda \cdot f$ donnée par :

$$\lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

Remarque. On manipule, par ces opérations, des fonctions et pas juste leurs images : la somme, le produit de deux fonctions donne une fonction.

Remarque. On pose, pour toute fonction f : $-f := (-1) \cdot f$ et $g - f = g + (-f)$.

Remarque. Voici la bonne manière de justifier les domaines de définition des fonctions donnés par une formule.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $x \mapsto x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule exactement en -1 et 1.
- Par quotient, la fonction f admet pour domaine de définition $\mathbb{R}_+ \cap (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Vous remarquerez qu'en pratique, on utilise une version légèrement différente de la définition 44.

Le modèle de rédaction donné plus haut ("l'expression $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$..."), et plus simple, est toutefois convenable.

Exemple 45. Considérons les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Déterminons la fonction $\mathrm{ch} + \mathrm{sh}$.

2. Composition de fonctions

Définition 46. Soit f et g deux fonctions réelles, de domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Supposons :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in D_g.$$

Alors, on appelle *composée de f par g* la fonction notée $g \circ f$ donnée par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Remarque. On retiendra facilement que (sous réserve de définition), $g \circ f(x) = g(f(x))$ car l'ordre d'écriture est le bon, mais on parle de la composée de f *par* g.

Remarque. Alternativement, on peut vous donner deux fonctions f et g et vous demander le *domaine de définition* de la composée $g \circ f$, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que le réel $g(f(x))$ est bien défini. Ce domaine est donné par :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}.$$

Exemple 47. Considérons les fonctions f et g donnée par $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$ et $g(x) = \ln(x)$.

(i) Déterminons le domaine de définition $\mathcal{D}_{g \circ f}$ de $g \circ f$.

(ii) Déterminons le domaine de définition $\mathcal{D}_{f \circ g}$ de $f \circ g$.

3. Compatibilité entre les propriétés et les opérations

a) Avec les opérations algébriques

Proposition 48. *Soient I une partie de $\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions réelles définies sur I.*

(i) Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes, resp. strictement) sur I, alors $f + g$ est croissante (resp. décroissante, resp. strictement) sur I.

(ii) Si f et g sont paires (resp. impaires) sur leur domaine de définition, alors $f + g$ est paire (resp. impaire) sur son domaine de définition.

(iii) Si f et g sont majorées (resp. minorée, resp. bornée) sur I, alors il en est de même de $f + g$.

Démonstration. En exercice. □

Remarque. On peut écrire beaucoup d'énoncés similaires (pour le produit, le quotient, et la multiplication scalaire), mais les apprendre par coeur n'est pas une bonne idée. Il faut mieux, à chaque fois, se reposer la question et être capable de refaire un raisonnement rapide au brouillon ou de tête. Vous serez peu exposés aux exercices très théoriques sur ces notions.

Par contre, attention aux énoncés faux :

Proposition 49. *L'énoncé suivant est faux : "le produit de deux fonctions croissantes est croissante".*

Démonstration. La fonction constante égale à -1 est croissante, la fonction $x \mapsto x$ est croissante, mais le produit $x \mapsto -x$ est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$, il n'est clairement pas croissant. □

Remarque. Le point (i) de la proposition 48 ci-dessus peut être amélioré : si f est croissante et g strictement croissante, alors $f+g$ est strictement croissante (les hypothèses sont affaiblies, il n'est pas nécessaire que les deux fonctions soient *strictement* croissantes pour que leur somme le soit).

Exemple 50. Cette proposition permet tout de même la justification en une phrase suivante : la fonction $x \mapsto x^2+x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme des fonctions strictement croissantes (sur $\mathbb{R}_+$) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x+1$.

b) Avec la composition

Dans cet énoncé, on étudie les propriétés *sur* tout le domaine de définition des fonctions envisagées.

Proposition 51. *f et g deux fonctions réelles.*

(i) Si f et g sont (resp. strictement) monotones, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) monotone.

(ii) Si f et g sont paires ou impaires, alors $g \circ f$ est paire ou impaire.

(iii) Si g majorée (resp. minorée, resp. bornée), alors il en est de même de $g \circ f$.

Remarque. Correspondance plus précise : à noter.

Démonstration. Démonstration de certains cas à noter. □

Exemple 52. Cette justification en une phrase est plus efficace qu'un calcul : la fonction $x \mapsto e^{x+1}$ est strictement croissante sur son domaine de définition comme composée des fonctions strictement croissantes $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto e^x$.

IV. Rappels sur la dérivation

1. Définition

Remarque. La dérivation fera l'objet de tout un chapitre au semestre 2.

Définition 53. (Partielle) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $I \subset D$.

(i) Soit $x_0 \in D$. On dit que f **est dérivable en** x_0 si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle *nombre dérivé de f en x_0* le réel $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(ii) On dit que f *est dérivable sur I* si : pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0.

(iii) Si f est dérivable sur $\mathcal{D}$, on appelle *fonction dérivée de f* la fonction notée f' donnée par :

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Remarque. Avec les notations ci-dessus, on appelle *domaine de dérivabilité de f* l'ensemble $D_{f'}$ des réels x en lesquels f est dérivable.

En fait, on note aussi f' la fonction dérivée de f sur son domaine de dérivabilité, si f n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition (ce qui étend la définition (iii)).

Remarque. Le symbole $'$ de dérivation s'applique aux fonctions, pas aux formules/réels. On nommera systématiquement nos fonctions pour les dériver.

Exemple 54. Les écritures comme $(\dfrac{2x}{x+1})'$ sont interdites (elles ont une "mauvaise interprétation" plus naturelle). On peut poser $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$ pour étudier son domaine de dérivabilité et considérer f'.

2. Opérations et dérivée

Nous n'avons pas encore vraiment d'outils sur les limites, et la définition de la dérivée utilise ces limites. Pour contourner ce problème, vous utiliserez :

- les fonctions dérivées des "fonctions usuelles", et
- les énoncés ci-dessous, décrivant comment la dérivation se comporte avec les opérations sur les fonctions.

Attention à bien utiliser les énoncés suivants.

Proposition 55. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur D.*

(i) Si f et g sont dérivables sur D, alors il en est de même de $f+g$ et :

$$\forall x \in D, (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(ii) Si f et g sont dérivables sur D, alors il en est de même de $f \times g$ et :

$$\forall x \in D, (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) Si g ne s'annule pas sur D, et si f et g sont dérivables sur D, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur D et :

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(iv) Si f est dérivable sur D, alors pour tout réel λ, $\lambda \cdot f$ est dérivable sur D, et :

$$\forall x \in D, (\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x).$$

Remarque. En particulier, pour tout réel x en lequel les deux membres de l'égalité suivante sont définis, on a :

$$(\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x)$$

(pour f, g des fonctions et λ un réel). On dit que la dérivation est *linéaire*. La somme et le produit par un réel (dit scalaire) sont "transparents" pour la dérivation.

Démonstration. Second semestre. □

Exemple 56. Déterminons la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

Pour la composition, le premier énoncé est plus précis, et le second plus facile à retenir. :

Proposition 57. *Soient f et g deux fonctions réelles.*

(i) Soit x un réel. Supposons que :
- *f est définie et dérivable en x, et*
- *g est définie et dérivable en $f(x)$.*

Alors, $g \circ f$ est (définie et) dérivable en x, et :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

(ii) Si f et g sont dérivables sur leurs domaines de définition, alors $g \circ f$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_{g \circ f}$, et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{g \circ f}, (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Démonstration. Voir S2. □

Dans la majorité des cas, l'utilisation de cette proposition est assez simple.

Exemple 58. Déterminons le domaine de dérivabilité, et la dérivée, de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2-1}$

Par contre, certaines fonctions ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition, et il faut faire attention quand elles sont utilisées.

Exemple 59. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \sqrt{t-1}$.

Exemple 60. Soit u une fonction réelle dérivable sur son domaine de définition D. Vous devez bien avoir en tête les compositions classiques suivantes :

(i) La fonction $e^u : t \mapsto e^{u(t)}$ est (définie et) dérivable sur D, et

$$\forall x \in D, (e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

(ii) La fonction $\ln(u) : t \mapsto \ln(u(t))$ est dérivable sur son domaine de définition $\{x \in D | u(x) > 0\}$, et

$$\forall x \in D, (\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

(iii) La fonction $\sqrt{u} : t \mapsto \sqrt{u(t)}$ est définie sur $\{x \in D | u(x) \geq 0\}$ et dérivable sur $D' = \{x \in D | u(x) > 0\}$, et

$$\forall x \in D', \left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

3. Dérivée et monotonie

Vous connaissez déjà surement ces énoncés classiques, mais faites attention aux hypothèses très importantes qu'on ajoute : **ici, I doit être un intervalle**. Et il devra en plus être ouvert dans le paragraphe suivant.

Rappel : "Soient I un intervalle réel et f une fonction réelle définie sur I" signifie : "Soient I un intervalle réel et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que $I \subset \mathcal{D}$".

Proposition 61. *Soient I un intervalle réel et f une fonction réelle définie sur I. On suppose f dérivable sur I. Alors :*

(i) f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

(ii) f est décroissante sur I ssi : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

(iii) f est une fonction constante sur I ssi $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration. S2 □

Remarque. I doit être un intervalle : pensez à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Généralement, c'est la *stricte* monotonie qui nous intéresse (pour les équations et inéquations par exemple). L'énoncé correspondant est plus compliqué, par exemple on perd l'équivalence.

Remarque. On dit qu'une fonction g s'annule en $x \in \mathbb{R}$ si $g(x) = 0$. Si de plus g est définie sur un intervalle I, on dit que q s'annule sur I s'il existe $x \in I$ tel que $g(x) = 0$.

Proposition 62. *Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I.*

(i) Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et si f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I, alors f est strictement croissante sur I.

(ii) Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ et si f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration. S2 □

Remarque. "f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I" signifie que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet un nombre fini de solutions. C'est souvent le cas, mais c'est faux pour les fonctions constantes par exemple (leur dérivée est nulle en tout point).

Remarque. Une autre manière d'exprimer la condition "$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I" est donc de dire que $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in I$ sauf éventuellement pour un nombre fini d'éléments de I (en lesquels f' s'annule).

Exemple 63. Montrons que la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Dérivée et extrema

La dérivée est très utile pour la recherche d'extrema. Attention à l'hypothèse d'ouverture.

Proposition 64. *Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$. Si f admet un extremum en a sur I, alors $f'(a) = 0$.*

Remarque. I doit être ouvert. Dessin à noter.

5. Dérivée et tangente

Définition 65. Soit f une fonction réelle, et a un réel tel que f est définie et dérivable en a. On appelle tangente à la courbe de f en a la droite d'équation :

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Remarque. Dessin à noter : le mieux est d'interpréter cette formule. On se rappellera que la tangente de f en a est l'unique droite caractérisée par :

- sa pente est la dérivée $f'(a)$ de f en a, et
- cette tangente passe par le point $(a, f(a))$.

V. Ensemble image, étude de fonctions et recherche d'antécédents

Cette partie sera enrichie et démontrée dans les chapitres à venir.

1. Ensemble image

Définition 66. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle définie sur D. On appelle *ensemble image de D par f* l'ensemble noté $f(D)$ donné par :

$$f(D) = \{f(x) | x \in D\}.$$

Autrement dit, $f(D)$ est la partie de $\mathbb{R}$ formée par toutes les images par f des éléments de D.

Remarque. Attention, $f(D)$ est ici une **notation**, on n'applique pas la fonction f à une partie D de $\mathbb{R}$. On ne peut appliquer une fonction réelle qu'à un réel...

Exemple 67. À noter : sans démonstration, donnons quelques ensembles images.

2. Recherche d'antécédents : ensemble image et bilan

Tout d'abord, la notion d'ensemble image permet de reformuler le problème de la recherche d'antécédents d'un réel donné par une fonction donnée. Dans l'unique but de simplifier les énoncés, on se placera sur un segment, mais vous pourriez avoir besoin en colle des énoncés similaires pour les autres types d'intervalles (je compte sur votre lycée).

Proposition 68. *Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a, b]$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il est équivalent de dire :*

(i) $y \in f([a, b])$, et

(ii) y admet un antécédent par f sur $[a, b]$.

Démonstration. Cela découle directement des définitions. $\square$

Remarque. En particulier, déterminer l'ensemble image $f([a, b])$, c'est déterminer l'ensemble des réels y admettant un antécédent dans $[a, b]$.

Pour déterminer l'ensemble image d'un segment par une fonction, on commencera par utiliser l'énoncé suivant, ce qui n'est possible que si la fonction y est strictement monotone et continue.

Proposition 69. *Soit f une fonction réelle définie sur un un segment $[a, b]$ (où a et b sont des réels tels que $a \leq b$). Supposons f continue sur $[a, b]$.*

(i) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

(ii) Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Démonstration. S2, c'est une version très simplifiée du théorème de la bijection monotone. $\square$

Remarque. C'est bien la première fois qu'on parle de fonction continue. Un chapitre sera consacré à cette notion au second semestre. Pour l'instant, il vous suffira d'appliquer la proposition suivante :

Proposition 70. *Si une fonction f est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.*

Remarque. Ce n'est pas un très bon argument d'un point de vue théorique : la continuité est plus facile à vérifier que la dérivabilité. C'est une "rustine" de début d'année.

3. Recherche d'antécédents : injectivité

Dans le paragraphe précédent, on a vu comment montrer l'existence d'antécédents sur un segment, pour une fonction strictement monotone. Voyons maintenant comment démontrer l'éventuelle unicité de tels antécédents, toujours sur intervalle (qui sera ici un segment).

Proposition 71. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Supposons f injective sur I. Alors, tout élément de $\mathbb{R}$ admet* au plus un *antécédent par f sur I.*

Démonstration. À noter : c'est juste une reformulation de la définition. $\square$

Mis ensemble, les deux proposition 69 et 71 permettent de correctement justifier l'éventuelle existence et unicité d'antécédents pour un réel donné. On utilisera la proposition suivante :

Proposition 72. *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$.*

(i) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors pour tout réel y il est équivalent de dire :
- *y admet un antécédent par f sur $[a, b]$, et*
- *$y \in [f(a), f(b)]$.*

Dans ce cas, y admet un unique antécédent sur $[a, b]$.

(ii) Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors pour tout réel y il est équivalent de dire :
- *y admet un antécédent par f sur $[a, b]$, et*
- *$y \in [f(b), f(a)]$.*

Dans ce cas, y admet un unique antécédent sur $[a, b]$.

L'étude d'une fonction consiste à :

- Déterminer son domaine de définition,
- déterminer son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée,

- en déduire ses intervalles de monotonie stricte à l'aide d'un tableau de signe de sa dérivée,
- dresser son tableau de variation,
- le compléter avec les limites éventuelles de la fonction à chaque borne du domaine de définition.

À partir de cela, on peut pour commencer:

- tracer une première approximation de son graphe,
- visualiser les extrema de cette fonction,
- répondre à des problèmes d'existence et d'unicité d'antécédents.

Nous reverrons tout cela dans le chapitre sur la dérivation, mais pour le dernier point, plus compliqué, vous suivrez la structure suivante.

Méthode : Pour comprendre la répartition des antécédents d'un réel y par une fonction f à partir de son tableau de variation...

- On se place sur chaque segment sur lequel f est strictement monotone, uns par uns.
- Sur chacun de ces segments, on utilise la proposition 72 pour déterminer les antécédents de y par f.
- On fait la même étude sur les intervalles ouverts ou semi-ouvert restants, en adaptant les conclusions de la proposition 72 à notre cas...

Exemple 73. Étudions la fonction $P : x \mapsto x^3 - 6x + 1$. Déterminons le nombre d'antécédents de 3 par P.

4. Un exercice de synthèse

Exercice 74. Considérons la fonction f donnée par la formule $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

(i) Donner le domaine de définition D de f.

(ii) Étudier la dérivabilité de f et calculer f'.

(iii) Faire le tableau de variation de f et tracer l'allure de son graphe.

(iv) Déterminer les limites de f. f est elle majorée, minorée, bornée? Admet elle un minimum, un maximum?

(v) Déterminer le nombre d'antécédents de 2 par f.

(vi) Considérons la fonction ch : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}\right.$. Déterminer ch $\circ f$.

VI. Lexique des fonctions usuelles

1. Les fonctions polynomiales

Une fonction polynomiale est une fonction f donnée par une formule de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont $n + 1$ nombres réels.

Propriétés des fonctions polynomiales

(*i*) Les fonctions polynomiales sont définies, dérivables sur $\mathbb{R}$.

(*ii*) Pour dériver ces fonctions, il suffit de savoir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, notant $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

On utilise alors la linéarité de la dérivation pour conclure.

Par exemple, les fonctions f et g définies par les formules

$$f(x) = 5x^3 + 2x + 1$$
$$g(x) = 2x^{10} - 3x^2 + 2$$

sont polynomiales donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times x^0 + 0 = 15x^2 + 2$$
$$g'(x) = 2 \times 10x^9 - 3 \times 2x + 0 = 20x^9 - 6x.$$

On verra bientôt un chapitre consacré aux propriétés de ces fonctions.

2. La fonction inverse

Considérons ici la fonction inverse $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$. On rappelle en particulier que cette fonction est utilisée pour la notation suivante, valable pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

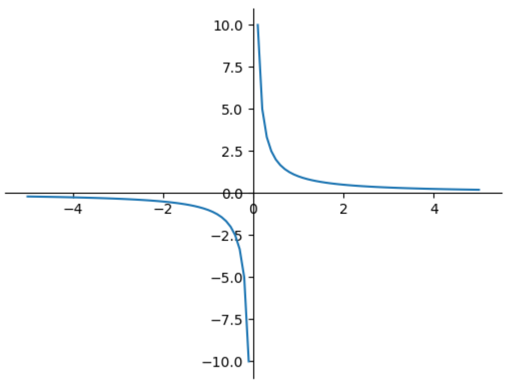
Propriétés de la fonction inverse

(*i*) La fonction inverse f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

(*ii*) La fonction inverse est impaire. Elle est décroissante sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$).

(*iii*) Le graphe de la fonction inverse est un exemple de courbes appelées hyperboles.



3. La fonction exponentielle

Considérons la fonction exponentielle $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$.

Propriétés de l'exponentielle

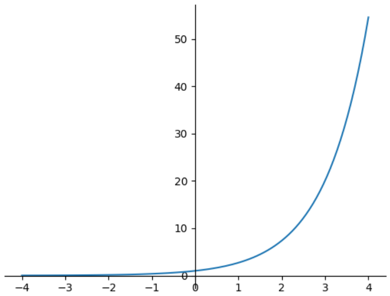
(*i*) La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(*ii*) La fonction exponentielle vérifie $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ (*Admis* : cela la caractérise et peut être pris comme définition de la fonction exponentielle).

(*iii*) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$.

(*iv*) La fonction exponentielle est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(*v*) Une inégalité à connaitre : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1 + x$



Exercice. À l'aide de la propriété (*iii*), montrer $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$ pour tous réels a et b.

4. La fonction logarithme de népérien

La fonction logarithme népérien est la fonction $\ln : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$, définie comme la fonction réciproque de l'exponentielle, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\ln(x)} = x \text{ et } \ln(\mathrm{e}^y) = y.$$

Alternativement, on peut la définir comme l'unique primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1. Ces deux définitions sont pour l'instant inaccessibles.

Propriétés de la fonction logarithme népérien

(*i*) La fonction ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et

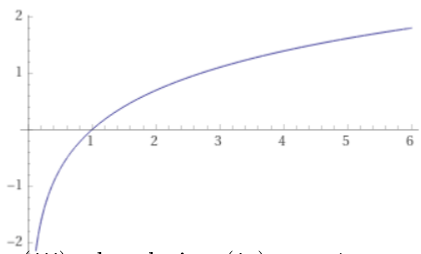
$$\forall x \in]0,+\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

(*ii*) La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$.

(*iii*) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

(*iv*) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n\ln(a)$.

(*v*) Une inégalité à connaitre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.



Exercice. Déduire de la relation (*iii*) : la relation (*iv*) par récurrence, et la relation $\ln(\dfrac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.

5. La fonction racine carrée

On va pouvoir définir la racine carrée.

Proposition 75. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x.$

Démonstration. À noter. $\square$

Conséquence de cette proposition : la définition suivante est *bien posée.*

Définition 76. (*i*) Soit x un réel positif. On appelle *racine carrée de x* l'unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, vérifiant :

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

(*ii*) On appelle fonction *racine carrée* la fonction réelle donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

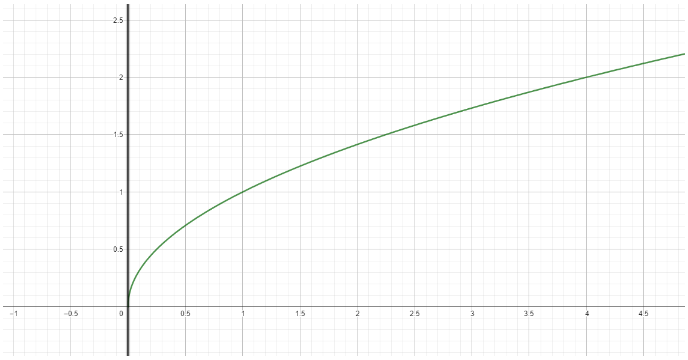
Proposition 77. *Soit* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ *la fonction racine carrée.*

(i) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Voici l'allure de son graphe. Elle n'est pas dérivable en 0, et admet une *tangente horizontale* en 0.



Voici les règles de calcul à connaitre.

Proposition 78. *Soient a et b deux réels positifs. Alors :*

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque. Utilisation de la quantité conjuguée. La quantité conjuguée est une technique de calcul classique pour manipuler des racines carrées. Elle consiste par exemple à utiliser la suite d'égalité, dans un sens ou l'autre et pour a et b non tous nuls :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Exemple 79. Déterminons (avec vos restes sur les limites) la limite de $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1}$ lorsque $t \to +\infty$.

Exemple 80. Simplifions $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Remarque. Un raisonnement analogue à celui fait pour définir la fonction racine carrée permet de définir les fonctions puissances à exposant rationnel, comme $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ ou $x \mapsto x^{\frac{-19}{60}}$. Nous ne le verrons pas ici. À savoir :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Pour gagner un peu de temps, on va de suite définir les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ généralisées à tout réel α.

6. Les fonctions puissance généralisée

Idée. On veut donner un sens à x^α, pour tout réel α et pas juste pour les entiers. Voici un calcul heuristique, qui ne fait pas office de justification (on veut définir le membre de gauche...), mais qui vous permet de retrouver la formule utilisée comme définition si vous l'oubliez.
Pour $x > 0$, on voudrait pouvoir écrire :

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln(x)}.$$

(on imite la propriété du $\ln$). On va donc prendre cela comme définition. Pour que ce soit bien défini, on doit avoir $x > 0$.

Définition 81. (*i*) Soit x un réel strictement positif. Soit α un réel. On note x^α le réel donné par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

(*ii*) Soit α un réel qui n'est pas un entier relatif. On appelle *fonction puissance généralisée de paramètre* α la fonction :

$$f_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right. .$$

Remarque. Si α est un entier relatif et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors la définition donnée pour x^α redonne les fonctions puissances précédentes (grâce au calcul donné en début de paragraphe). Le point (*i*) de la définition est donc bien posé.

Remarque. Si α est un entier relatif, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est déjà définie, et admet un domaine de définition plus grand ($\mathbb{R}$ si α est positif, $\mathbb{R}^*$ sinon).

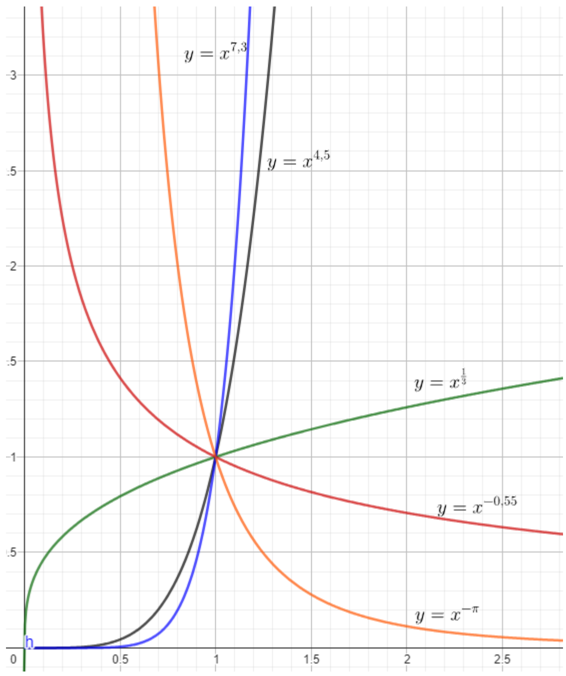
Proposition 82. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.*

(i) f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) f_α est strictement croissante si $\alpha > 0$, et strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Voici quelques tracés de ces fonctions.



Pour calculer, les règles classiques des puissances s'étendent.

Proposition 83. *(Règles de calcul avec les puissances)*
Soit α un réel.

(i) *Pour tout réel β et pour tout réel $x > 0$:*
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \text{ et}$$
$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}.$$
En particulier, $x^{-\beta} = \dfrac{1}{x^\beta}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, (\mathrm{e}^x)^\alpha = e^{\alpha x}$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

(iii) *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$: $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ *et* $(\dfrac{x}{y})^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Remarque. Ce sont les règles de calcul pour les puissances entières...

Démonstration. A noter? □

7. La fonction valeur absolue

Définition 84. (*i*) Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x le réel noté $|x|$ donné par :
$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

(*ii*) On appelle fonction *valeur absolue* la fonction $|\cdot|$ donnée par :
$$|\cdot| : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right. .$$

Exemple 85. $|\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$ car $\sqrt{3} - 1 > 0$, $|\pi - 5| = 5 - \pi$ car $\pi < 5$.

Proposition 86. *(i) La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0. Sa fonction dérivée est la fonction :*
$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

(ii) La fonction valeur absolue est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Voici ses propriétés classiques :

Proposition 87. *Pour tous réels a et b :*

(i) $|-a| = |a|$,

(ii) $|a| = |b| \iff a = b$ *ou* $a = -b$.

(iii) $|ab| = |a||b|$ *et* $\dfrac{|a|}{|b|} = |\dfrac{a}{b}|$ *(si $b \neq 0$),*

(iv) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(première inégalité triangulaire),*

(v) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *(seconde inégalité triangulaire).*

Démonstration. (*i*) et (*iv*) à noter. □

Remarque. La première inégalité triangulaire est très importante et peut être requise pour les exercices utilisant la valeur absolue. C'est plus rare pour la seconde, mais ça pourrait apparaitre.

Remarque. La première inégalité triangulaire donne aussi, pour a et b réels :

$$|a-b| \leq |a|+|b|$$

(l'appliquer à $-b$ et utiliser (i)).

Remarque. Attention $|a+b|=|a|+|b|$ est très faux. Exemple : $|1+(-1)|=0 \neq 1+1$. Par contre...

Proposition 88. *(HP) Soient a et b deux réels. Il est équivalent de dire :*

(i) $|a+b|=|a|+|b|$, *et*

(ii) *a et b sont de même signe.*

Remarque. Distance Pour être à l'aise avec les exercices portant sur la valeur absolue, il est très important de comprendre qu'elle permet de mesurer une distance. Explication à noter.

Attention aux pièges avec des racines carrées et des carrés : utilisez toujours les 2 premiers points de la proposition suivante. Le 3e peut servir pour des exercices plus particuliers.

Proposition 89. *(i)* $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2}=|x|$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x})^2=x$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, |x|=\max(x,-x)$.

Enfin, pour des équations et inéquations utilisant la valeur absolue, on utilisera les points suivants :

Proposition 90. *Soit x un réel.*
Pour tout réel $r \geq 0$:

(i) $|x|=r \iff (x=r$ *ou* $x=-r)$.

(ii) $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.

(iii) $|x|<r \iff -r<x<r$.

(iv) $|x| \geq r \iff (r \leq x$ *ou* $x \leq -r)$.

(v) $|x|>r \iff (r<x$ *ou* $x<-r)$.

De plus :

(vi) *Pour tout réel $r<0$, les énoncés "$|x|=r$", "$|x| \leq r$" et "$|x|<r$" sont faux.*

(vii) *Pour tout réel $r<0$, les énoncés "$|x|>r$ et $|x| \geq r$" sont vrais.*

Démonstration. Ce serait long sans être difficile. Donnons en une.
Montrons que si $r \geq 0$, alors :

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.$$

On va utiliser une propriété simple du maximum, qui est le seul point important à retenir de cette démonstration :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \max(a,b) \leq r \iff (a \leq r \text{ et } b \leq r).$$

Alors :

$$|x| \leq r \iff \max(-x,x) \leq r \iff x \leq r \text{ et } -x \leq r \iff x \leq r \text{ et } x \geq -r \iff -r \leq x \leq r.$$

Au lieu d'apprendre ces résultats par coeur, il faut mieux les comprendre sur un dessin (à noter). □

8. La fonction partie entière

Le partie entière d'un réel est le nombre entier qui lui est immédiatement inférieur. Son existence et unicité se traduit ainsi :

Proposition 91. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leq x<n+1$.

Démonstration. Admise : ce résultat est facile à comprendre, et une démonstration serait longue sans être éclairante. □

Cette proposition permet de donner la :

Définition 92. *(i)* Soit x un réel. On appelle partie entière de x l'unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$, vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

(ii) On appelle fonction partie entière la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right. .$$

Exemple 93. *(i)* $\lfloor 42 \rfloor = 42$

(ii) $\lfloor \pi \rfloor =$

(iii) $\lfloor 2.57 \rfloor =$

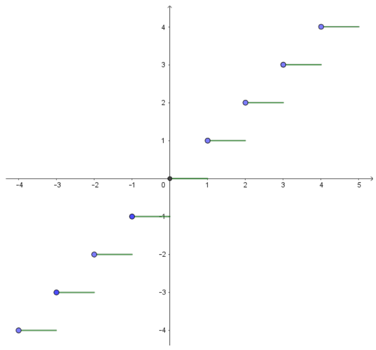
(iv) $\lfloor -3.1 \rfloor =$

(v) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \iff \ldots$

(vi) Déterminons $\lfloor \sqrt{5} - 1 \rfloor$.

(vii)

Encore une fois, avoir la courbe bien en tête permettra de retrouver les propriétés requises.



Proposition 94. *(i) La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

(ii) La fonction partie entière est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) La fonction partie entière est dérivable sur chaque intervalle $]n, n+1[$, de dérivée nulle.

On a peu de techniques de manipulations "calculatoires" de la partie entière. Alors, comme pour la valeur absolue, on complète ces propriétés avec les manipulations à utiliser dans le cadre de la résolution d'équations ou d'inéquations. Remarquez le caractère particulier des points du *(iv)* : n doit être un entier, sinon c'est faux.

Proposition 95. *Soit x un réel. Alors :*

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

(ii) $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ *(c'est la définition, requise pour des exercices).*

(iii) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

(iv) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors :
- $\lfloor x \rfloor \leq n \iff x < n + 1$.
- $\lfloor x \rfloor < n \iff x < n$.
- $\lfloor x \rfloor \geq n \iff x \geq n$.
- $\lfloor x \rfloor > n \iff x \geq n + 1$.
- $\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$ *(encore une fois, c'est la définition).*

Démonstration. De même, c'est long sans être difficile ni éclairant. Le plus important est de retrouver ces équivalence assez vite en pensant au graphe ci-dessus. Illustration à noter. $\square$

9. La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

Définition 96. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction

$$\exp_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x\ln(a)} \end{array} \right. .$$

Exercice 97. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note ici $f_a = \exp_a$ la fonction exponentielle de base a.

(i) Justifier que f_a est dérivable sur son domaine de définition, et calculer sa dérivée.

(ii) En déduire le sens de variation de f_a en fonction de a.

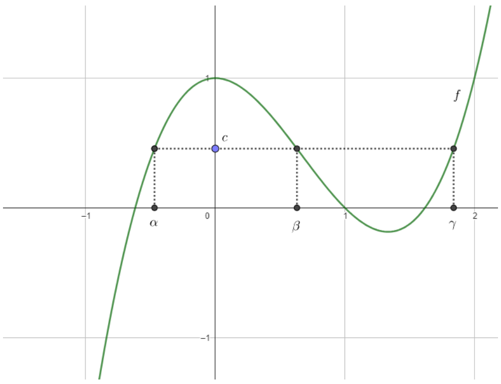
(iii) Déterminer la tangente à la courbe de f_a en le point d'abscisse 0.

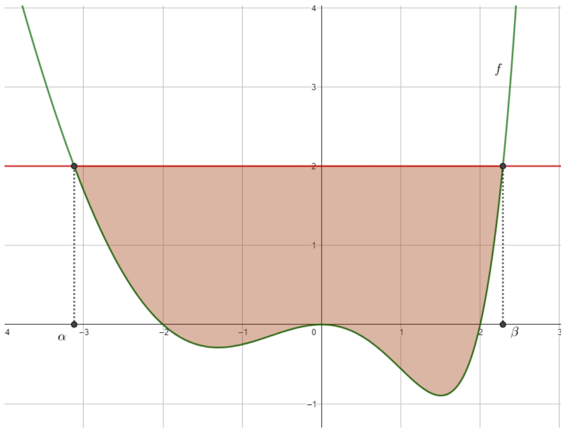
(iv) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_a pour $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$ et $a = 2$.

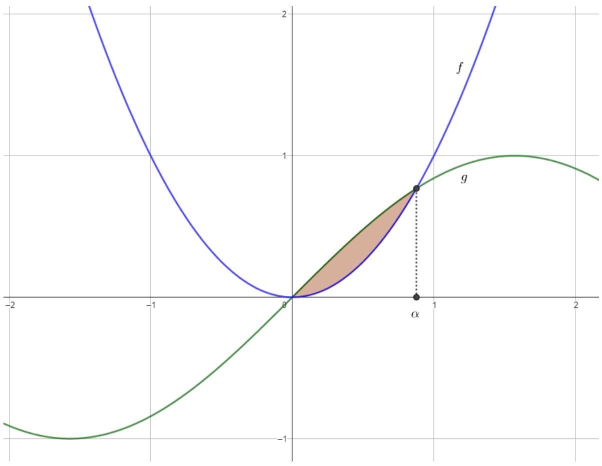
VII. Annexe

interprétation graphique des inégalités et égalités

Indiquons sous chaque figure les équivalences représentées







Et représentons ci-dessous :
$f(x) = g(x) \iff x = 0$ ou $x = 1$.

Exercice 98. Représenter graphiquement toutes les équivalences classiques qu'on peut utiliser pour simplifier les énoncés de la forme "$x^2 = a$", "$x^2 \geq a$" et "$x^2 < a$", en fonction de a.

Proposition 40 sur les fonctions bornées

Soit f une fonction définie sur I. Procédons par double implication.

Supposons f bornée, et montrons :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq A.$$

Par hypothèse, f étant bornée, elle est minorée et majorée donc on dispose de deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M.$$

On pose $A = \max(|m|, |M|)$.

Montrons $-A \leq m$ et $M \leq A$.

On a $A \geq |m|$ donc $-A \leq -|m|$. Or, l'inégalité $-|m| \leq m$ est vraie quelque soit m (si m est négatif, c'est une égalité et sinon cette inégalité provient de $-|m| \leq 0 \leq m$). Par transitivité, $-A \leq m$.

De même, $|M| \leq A$ implique que $M \leq A$ car, quelque soit M on a : $M \leq |M|$.

On a donc bien montré $-A \leq m$ et $M \leq A$.

Alors, pour tout réel $x \in I$:

$$-A \leq m \leq f(x) \leq M \leq A$$

donc par transitivité :

$$-A \leq f(x) \leq A$$

d'où : $|f(x)| \leq A$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $x \in I$, on a bien démontré la première implication :

si f est bornée, alors : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A$.

Réciproquement, si l'on dispose d'un réel A tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq A$$

alors :

$$\forall x \in I, -A \leq f(x) \leq A$$

donc f est minorée par $-A$ et majorée par A : elle est bien bornée. Ceci démontre bien la seconde implication.