Programme de colle n^o 2 : Logique, ensembles et raisonnements (fin). Généralités sur les fonctions réelles (début).

*Semaine du lundi **23 septembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Raisonnements (fin du chapitre 1).

2.1 La démonstration par l'absurde. La disjonction des cas. Raisonnements par analyse-synthèse. Remarques sur l'utilisation des hypothèses données sous la forme d'énoncés quantifiés.

2.2 Démonstration d'une inclusion ensembliste. Démonstration d'une égalité ensembliste par double inclusion.

2.3 Le raisonnement par récurrence. Initialisation à un rang quelconque. Récurrence sur deux rangs. Récurrence forte. Premières utilisations du symbole $\sum$.

L'interrogation sera particulièrement exigeante vis à vis des éléments de rédaction liés à la récurrence. La récurrence forte est à la limite du programme officiel, pas d'exercices trop difficiles sur cette structure de démonstration.

Généralités sur les fonctions réelles.

2.4 Notion de fonction réelle. Domaine de définition. Image d'un réel par une fonction. Notion d'antécédent. Fonction constante, fonction nulle.

2.5 Fonction "donnée par une formule" et recherche du domaine de définition. Graphe d'une fonction.

On attend une utilisation précise du vocabulaire et de la logique.

2.6 Vocabulaire : fonction définie *en* un réel, *sur* une partie de $\mathbb{R}$.

2.7 Fonctions monotones (sur une partie de $\mathbb{R}$): définition. Fonctions strictement monotones (sur une partie de $\mathbb{R}$). Si f est strictement (dé)croissante sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors elle est (dé)croissante sur I. Si f est croissante sur I, alors : $f(x) < f(y) \implies x < y$, pour tous x, y éléments de I (et énoncé similaire pour f décroissante). Applications de fonctions strictement monotones et obtention d'inégalités équivalentes (prop 25). Utilisation pour la résolution d'inéquations (méthodes du chapitre 0).

2.8 Application de la monotonie stricte pour la résolution d'équations : notion de fonction réelle injective sur une partie I de $\mathbb{R}$. Toute fonction strictement monotone sur I est injective sur I.

2.9 Partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Fonction paire, fonction impaire et propriétés de symétrie de la courbe de telles fonctions.

Python

2.10 Types classiques (int float str bool list tuple), variables, tests "if", boucles "for".

Pas encore au programme pour des exercices, mais peut faire l'objet d'une petite question de cours (lecture/complétion de code par exemple).

Quelques questions de cours

1. Comme indiqué en en-tête, les questions de cours de la semaine dernière sont toujours au programme de cette semaine (cette remarque sera valable toute l'année).
2. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Montrer que $n^2 - n$ est pair pour tout entier relatif n.
4. Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.
5. Déterminer, par analyse synthèse, les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$
6. On pose $A = \{(4t+1, t+2) | t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = -7\}$. Démontrer que $A = B$. *Toute variante similaire possible.*
7. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
8. Montrer par récurrence que si u est une suite réelle vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

9. Énoncer et démontrer la proposition 25, relative à l'utilisation de la monotonie stricte dans le but d'obtenir des inégalité équivalentes.
10. Montrer que toute fonction strictement monotone sur une partie I de $\mathbb{R}$ est injective sur I.
11. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe d'uniques fonctions réelles f_P et f_I définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_P(x) + f_I(x) \\ f_P \text{ est paire} \\ f_I \text{ est impaire} \end{cases}$.