TD de mathématiques n°2 : Généralités sur les fonctions réelles

Pour commencer

Propriétés des fonctions réelles

Exercice 1 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

(a) $x \longmapsto \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

(b) $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x-1-\frac{1}{x-1}}$

(c) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}$

(d) $x \longmapsto \sqrt{x^2-x-2}$

(e) $x \longmapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}}$

(f) $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles.

(a) Montrer que si f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que si f et g sont croissantes et positives sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que si f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que si f et g sont décroissantes et positives sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrer que $f+g$ et $f \times g$ sont bornées.

Exercice 4 On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(a) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la valeur de ce minimum.

(b) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 5 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Calculer $f(x)+1$ et $f(x)-1$ pour tout réel x, puis en déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, \ln(1+t) \leq t$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b}$. Montrer que f est admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer la valeur de ce minimum. On pourra utiliser un tableau de variation.

Exercice 8 Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1+e^{-x}}{1+e^x}$ n'est ni paire ni impaire.

Exercice 9 *Parité, imparité : on parle des "propriétés de symétrie".* Étudier les propriétés de symétrie de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 10 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$. Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire. Étudier les propriétés de symétrie des fonctions $x \longmapsto xf(x)$ et $x \longmapsto x^2 f(x)$.

Exercice 12 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous (on précisera les domaines de définition et de dérivabilité).

(a) $x \longmapsto e^{x\ln x}$

(b) $x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$

(c) $x \longmapsto e^{\sqrt{x}}$

(d) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

(e) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(f) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Exercice 13

(*a*) Montrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$ à l'aide d'une étude de variations.

(*b*) En déduire que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \geq \dfrac{x}{1+x}$. *Indication : on pourra appliquer le résultat précédent à* $-\dfrac{x}{1+x}$.

Exercice 14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$ à l'aide d'une étude de variations.

Exercice 15 On considère les fonctions f et g définies par les formules $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g, \mathcal{D}_{g \circ f}$ de f, g et $g \circ f$ et calculer $g \circ f$. Que peut-on dire de $f \circ g$?

Exercice 16 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ et écrire la formule donnant cette fonction. Même consigne pour la fonction composée $f \circ g$.

(*a*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$

(*b*) $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = x - 1$

(*c*) $f(x) = 8x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

(*d*) $f(x) = \ln(e^x + 1)$ et $g(x) = \ln(e^x - 1)$

Exercice 17 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

(*a*) Montrer que si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.

(*b*) Montrer que si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.

(*c*) Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.

Exercice 18 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\sqrt{4 - x^2}$.

(*a*) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

(*b*) Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f.

(*c*) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'$.

(*d*) En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$ et montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$.

Valeur absolue

Exercice 19 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(*a*) $|x - 2| = 1$

(*b*) $\left|x^2 - 1\right| = x + 5$

(*c*) $\left|2x^2 + x - 1\right| = 3 - x$

(*d*) $|x - 2| \leq x$

(*e*) $\left|x^2 + x - 2\right| \geq x$

(*f*) $\left|x^2 - 3x + 2\right| \leq |x - 2|$

Exercice 20 Tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes :

(*a*) $x \longmapsto |x + 2|$

(*b*) $x \longmapsto \left|x^2 - x - 2\right|$

(*c*) $x \longmapsto |\ln x|$

Exercice 21 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right|$.

(*a*) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et étudier ses propriétés de symétrie.

(*b*) Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.

(*c*) Étudier les variations de f sur son domaine.

(*d*) Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 22 Soit $x \in [-1, 1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{x^n}{n^\alpha}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée en montrant :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq M.$$

Partie entière

Exercice 23 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Exercice 24 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Exercice 25 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $\lfloor 2x \rfloor = 1$	(c) $\lfloor x^2+1 \rfloor = 2$	(e) $\lfloor x^2-4 \rfloor < 5$
(b) $\lfloor 3x+1 \rfloor = 2$	(d) $\lfloor 2x-1 \rfloor \geq 2$	(f) $\lfloor 4x(1-x) \rfloor > 0$

Exercice 26 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (on dit que F est la fonction partie fractionnaire).

(a) Montrer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x+1) = F(x)$.

(c) Tracer la représentation graphique de la fonction F sur l'intervalle $[0,1[$.

(d) En déduire la représentation graphique de la fonction F sur l'intervalle $[-5,5]$.

Puissances généralisées

Exercice 27 Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 28 On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^x$.

(a) Rappeler la définition de la quantité $(1+x)^x$ et en déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$. En déduire le meilleur minorant possible de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 29 Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^{\ln x}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 30 Étudier les variations de la fonction définie par la formule $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ sur son domaine de définition et en déduire qu'il s'agit d'une fonction bornée. En déduire la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 31 Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = (x+1)^\alpha - x^\alpha$.

Étudier le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour continuer

Propriétés des fonctions réelles

Exercice 32 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

(a) $x \longmapsto \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}$	(c) $x \longmapsto \ln(1-x) + \ln(1+x)$
(b) $x \longmapsto \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	(d) $x \longmapsto \ln\left(x^2+x-12\right)$

Exercice 33 Montrer que la fonction définie par la formule $f(x) = e^{-x\ln x}$ est bornée sur son domaine. On pourra utiliser un tableau de variation.

Exercice 34 Montrer que la fonction définie par la formule $f(x) = e^{\dfrac{\ln x}{x}}$ est bornée sur son domaine.

Exercice 35 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = 1$.

Étudier les propriétés de symétrie de la fonction g définie par la formule $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice 36 Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à l'origine et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Montrer qu'il existe une unique fonction $p : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction $i : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que p est paire, i est impaire et $f = p + i$.

(b) Déterminer explicitement p et i dans le cas où f est définie sur $]-1,1[$ par la formule $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$. Étudier les propriétés de symétrie de f et g.

Exercice 38 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous (on précisera les domaines de définition et de dérivabilité).

(a) $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

(b) $x \longmapsto \ln(1+e^{-x})$

(c) $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(d) $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

(e) $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(f) $x \mapsto \sqrt{x^2-2x-1}$

Exercice 39

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ à l'aide d'une étude de variations.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \leq 1+xe^x$. *Indication : on pourra appliquer le résultat précédent.*

Exercice 40 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ à l'aide d'une étude de variations.

Exercice 41 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ et écrire la formule donnant cette fonction. Même consigne pour la fonction composée $f \circ g$.

(a) $f(x) = \frac{x+2}{1+2x}$ et $g(x) = \frac{x-2}{1-2x}$

(b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$ et $g(x) = \frac{3x+5}{2-x}$

(d) $f(x) = x^2-2x-3$ et $g(x) = \ln(x)$

Valeur absolue

Exercice 42 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|3-x| = x-1$

(b) $|x+1| = |2x-1|$

(c) $|2x+1| = 1-x$

(d) $\left|3-x^2\right| = 1$

(e) $\left|1-x^2\right| = |x+1|$

(f) $|2x-3| \geq 1$

(g) $|x+3| > |3x+1|$

(h) $|3x+1| \leq 4$

(i) $|x-1| \geq |x+1|$

(j) $\left|1-x^2\right| \leq 2x$

Exercice 43 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $|x| \leq |x-y|+|y|$ et $|y| \leq |x-y|+|x|$.

(b) En déduire que $|x-y| \geq ||x|-|y||$ (seconde inégalité triangulaire).

Exercice 44 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{-|x|}$.

(a) Étudier les propriétés de symétrie de f.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.

(c) En déduire le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 45 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = |x-2|+|x|+|x+2|$.

En distinguant des cas de manière appropriée, exprimer la fonction f sans utiliser de valeur absolue.

Tracer ensuite soigneusement la représentation graphique de la fonction f.

Résoudre enfin les équations $f(x) = -2$ et $f(x) = 6$ ainsi que les inéquations $f(x) < 5$ et $6 \leq f(x) < 8$.

Exercice 46 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x-a| - |x-b|.$$

Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ (déterminer le meilleur minorant et le meilleur majorant).

Exercice 47 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x-a| + |x-b|.$$

(a) En distinguant trois cas appropriés, donner une expression de $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.

(b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, |x-a|+|x-b| \geq b-a$.

Partie entière

Exercice 48 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 49 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $\lfloor 1 - x^2 \rfloor = 0$

(b) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$

(c) $\lfloor 1 - 2x \rfloor = -3$

(d) $\lfloor x^2 + 2x - 3 \rfloor = 0$

(e) $\lfloor x \rfloor = x$

(f) $\lfloor -x \rfloor < 1$

(g) $\lfloor 2 - x \rfloor \leq 1$

(h) $\lfloor x^2 + x - 1 \rfloor > 0$

(i) $2\lfloor x + 1 \rfloor \leq 3$

(j) $4\lfloor x^2 + x \rfloor \leq 5$

Exercice 50 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(1 - x + \lfloor x \rfloor)$.

(a) Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = f(x)$. En déduire le tracé complet de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Puissances généralisées

Exercice 51 Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^{x^2}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 52 Étudier les variations de la fonction $f(x) = (x^x)^2$ sur son ensemble de définition.

Exercice 53 0n souhaite déterminer, s'il en existe, les valeurs $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a < b$ telles que $a^b = b^a$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^b = b^a \iff f(a) = f(b)$.

(b) (i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Dresser également le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < b$. À l'aide de la question (b), montrer que $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = 2$.

(d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}, 2^n > n^2$.

(e) Conclure en donnant toutes les solutions du problème posé.