Programme de colle n^o 3 : Fonctions réelles de la variable réelle.

*Semaine du lundi **30 septembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Propriétés des fonctions réelles (suite du PC précédent).

3.1 Fonction majorée, minorée ou bornée sur une partie de $\mathbb{R}$. Caractérisation : f est bornée sur I si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

3.2 Maximum, minimum et extremum d'une fonction réelle.

La notion d'extremum local sera vue plus tard.

Opérations sur les fonctions réelles

3.3 Somme, produit et quotient de fonctions réelles. Multiplication scalaire. Composition de fonctions réelles, domaine de définition de la composée de fonctions réelles.

3.4 La somme de fonctions toutes deux (strictement) croissantes, (strictement) décroissante, paires, impaires, majorées, minorées ou bornées a la même propriété (prop. 48). De nombreuses propriétés similaires existent, il est préférable de savoir les retrouver. Attention aux énoncés faux : le produit de deux fonctions croissantes n'est pas forcément une fonction croissante.

3.5 Composition et monotonie, composition et propriétés de symétries. Si g est majorée minorée ou bornée, alors il en est de même pour $g \circ f$.

Rappels sur la dérivation (démonstrations au second semestre)

3.6 Dérivabilité d'une fonction réelle en un point de son domaine de définition. Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$, fonction dérivée et domaine de définition de la dérivée.

3.7 La somme et le produit de fonctions dérivables sur une partie D de $\mathbb{R}$ est dérivable sur D. Propriété similaire pour le quotient de fonctions et pour la multiplication scalaire. Formules.

3.8 Si f est (définie et) dérivable en x et si g est (définie et) dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est (définie et) dérivable en x. Formule donnant $(g \circ f)'(x)$. Si f et g sont dérivables sur leur domaine de définition, alors il en est de même de $g \circ f$.

3.9 Caractérisation de la monotonie d'une fonction dérivable **sur un intervalle** à l'aide du signe de sa dérivée. Condition suffisante de monotonie stricte.

3.10 Condition nécessaire d'extremum : si f est dérivable sur un intervalle ouvert I, et si f admet un extremum en a sur I, alors $f'(a) = 0$.

3.11 Tangente à la courbe d'une fonction en un point de dérivabilité.

Recherche d'antécédent (démonstrations au S2)

3.12 ensemble image $f(D)$ d'une partie D de $\mathbb{R}$ par une fonction f définie sur D. Si f est continue et croissante sur un segment $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Version décroissante.

Les énoncés de ce type sont donnés pour un segment, mais les élèves doivent pouvoir s'en servir librement pour des intervalles ouverts ou semi ouverts (utilisation du tableau de variation). Continuité : boite noire (se référer aux fonctions usuelles, utiliser "toute fonction dérivable est continue").

3.13 Remarque : les problèmes de recherche d'antécédent peuvent parfois se résoudre de manière exacte, mais dans de nombreux cas on ne peut que statuer de manière qualitative. Exemple admis HP : les éventuelles solution de $xe^x = m$ (m fixé, x inconnue) ne peuvent pas s'exprimer avec les fonctions usuelles en fonction de m.

3.14 Lien entre injectivité et antécédents. Version ad-hoc tu théorème de la bijection monotone : si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors pour tout réel y, y admet un antécédent par f sur $[a, b]$ ssi $y \in [f(a), f(b)]$ et dans ce cas, y admet un unique antécédent par f sur $[a, b]$. Version strictement décroissante.

La notion de bijectivité n'a pas encore été vue, d'où la version ad-hoc non nommée. Les élèves peuvent adapter cet énoncé pour des intervalles ouverts ou semi ouverts conformément à l'information présentée sur un *tableau de variation. Les limites seront systématiquement données par l'interrogation.*

3.15 Exercices de synthèse : étude de fonction, utilisation du tableau de variation pour tracer l'allure d'un graphe, résoudre des problèmes liés au caractère borné et aux extrema d'une fonction, et pour résoudre des problèmes de recherche d'antécédents.

À finir : lexique des fonctions usuelles et de leurs propriétés

Python

3.16 Utilisation de variables, de boucles for et de test conditionnels pour des premiers exercices classiques : calculs de sommes, de produits, de termes d'une suite définie par une relation de récurrence (de rang 1 de toute forme).

Module numpy, définition de fonctions et boucles while la semaine prochaine.

Quelques questions de cours

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ est bornée, admet un minimum, mais pas de maximum.
2. Déterminer le domaine de définition des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ où f et g sont données par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{2}{x} + 1$.
3. Montrer que si f et g sont deux fonctions strictement décroissantes sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $f + g$. Toute variante similaire liée à la monotonie et faisant intervenir la somme ou la composition possible.
4. Énoncer et démontrer la caractérisation des fonctions bornées faisant intervenir la valeur absolue.
5. Dresser le tableau donnant la propriété de symétrie d'un composée $g \circ f$ de fonctions f et g paires ou impaires. Démontrer un résultat, au choix de l'interrogation.
6. Donner sans démonstration le domaine et la forme des dérivées des fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$, $x \mapsto \ln(u(x))$ et $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, où u est une fonction dérivable sur son domaine de définition D. Déterminer le domaine de dérivabilité et la fonction dérivée de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$.
7. Donner un code Python permettant de calculer le produit $(2+3)(2+3+4)(2+3+4+5)...(2+3+...+16)$. Toute variante similaire possible.
8. Définir la tangente à la courbe d'une fonction en un de ses point de dérivabilité. Donner une représentation graphique, en expliquant les éléments intervenant dans cette définition. Énoncer la condition nécessaire d'extremum vue en cours (prop. 64). Représenter la situation sur un dessin, et expliquer (dessin) que l'hypothèse d'ouverture de l'intervalle est nécessaire.
9. Énoncer la version ad-hoc du théorème de la bijection monotone vue en cours (prop. 72). Déterminer le nombre d'antécédent de 3 par la fonction $x \mapsto x^3 - 6x + 1$. Toute variante similaire possible.