Exercice 74 du chapitre 2.

Le 30 septembre.

(*i*) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{x^2-1}$ est bien défini si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$.

Or, $x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Donc $\sqrt{x^2-1}$ est bien défini si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Dans ce cas, $x + \sqrt{x^2-1}$ est bien défini. Donc $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est bien défini si et seulement si :

$$\begin{cases} x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x + \sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases}.$$

Or, si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, alors $0 \leq x^2 - 1 < x^2$ donc par croissance stricte de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ainsi, si $x \leq -1$ alors $\sqrt{x^2-1} < |x| = -x$ donc $x + \sqrt{x^2-1} < 0$, et si $x \geq 1$, alors $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ (positivité de la racine carrée).

Par conséquent, $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est bien défini si et seulement si $x \geq 1$.

Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } D = [1, +\infty[.}$

(*ii*) $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme polynôme.

Donc par composition, $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Par somme puis composition avec les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ dérivables sur leur domaine de définition :

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } D' =]1, +\infty[\cap D =]1, +\infty[.}$

Alors, pour tout $x \in D'$:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \times 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Donc $\boxed{f' \text{ est la fonction } f' : \begin{array}{lcl}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}.}$

(*iii*) $\forall x \in D', f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$.

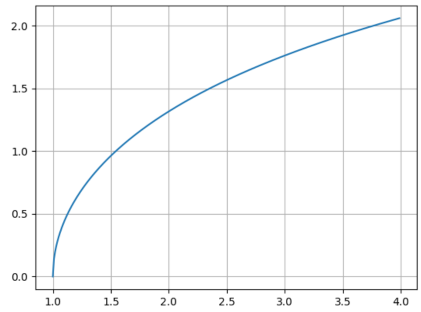
Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

De plus, on admet ici (serait précisé par le sujet en DS) que la continuité de f en 1 permet de conclure que f est strictement croissante sur $D = [1, +\infty[$.

(On peut aussi le démontrer en montrant que : $\forall x > 1, f(x) > f(1)$.)

Pour l'allure du graphe, la question est un peu vaine ici, on a assez peu d'éléments : on peut calculer par exemple l'équation de la tangente à la courbe en le point d'abscisse 2.

Le graphe est le suivant.



(iv) On montrera facilement que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.}$

Voici un avant-goût de la rédaction complète.

Sans forme indéterminée, $x^2-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $\sqrt{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

Donc par composition, $\sqrt{x^2-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Par somme puis composition ($\ln(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $x+\sqrt{x^2-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$), on a donc :

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

(Fin de la rédaction sur les limites)

f est croissante sur $[1,+\infty[$ donc : $\forall x \geq 1, f(x) \geq f(1)$. Ainsi, f admet un minimum en 1 valant $f(1)=0$.

$\boxed{f \text{ admet un minimum en 1 valant 0, et est donc minorée par 0.}}$

De plus, f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, et D est un voisinage de $+\infty$:

$\boxed{f \text{ n'est donc pas majorée sur } D\text{, et donc n'a pas de maximum sur } D}$.

(On utilise ici un théorème qui sera classique).

Pour montrer que f n'est pas majorée, on pouvait aussi dire que pour tout réel M, $f(e^M) > M$ (calcul à effectuer), donc pour tout réel M, M n'est pas un majorant de f.

(v) f est continue et strictement croissante sur $D=[1,+\infty[$ donc :

- Par monotonie stricte, f est injective : 2 admet au plus un antécédent par f.
- $f(D) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$. Ainsi, $2 \in f(D)$ donc 2 admet un antécédent par f.

Ainsi, $\boxed{2 \text{ admet un unique antécédent par } f.}$

(vi) ch a pour domaine de définition $D_mathrmch = \mathbb{R}$, donc :

$$\forall x \in D, f(x) \in D_{\mathrm{ch}}.$$

Par composition, $\mathrm{ch}\circ f$ a pour domaine de définition $D=[1,+\infty[$.

Alors, pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\circ f(x) = \mathrm{ch}(f(x)) &= \frac{e^{f(x)}+e^{-f(x)}}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} \\
&= \frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})} \\
&= x\frac{2(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})} = x
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{ch}\circ f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}}$.