Programme de colle n^o 4 : Fonctions réelles de la variable réelle (fin), Sommes et produits (début).

*Semaine du lundi **7 octobre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Fonctions usuelles

4.1 Définition et propriétés classiques des fonctions usuelles suivantes : fonctions polynomiales, fonction inverse, fonction exponentielle (dont l'inégalité classique "$e^t \geq 1 + t$"), logarithme népérien (dont l'inégalité classique "$\ln(x) \leq x - 1$").

4.2 Proposition permettant de définir la racine carrée d'un réel positif. Définition de $x \mapsto \sqrt{x}$. Monotonie et dérivée (admis). Règles de calcul, quantité conjuguée.

La notion de bijectivité n'est pas encore présente à ce stade.

4.3 Fonctions puissances généralisées. Dérivabilité et monotonie. Règles de calcul.

À ce stade, $x \mapsto x^\alpha$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4.4 Fonction valeur absolue, dérivabilité et dérivée (non dérivabilité en 0 admise). Règles de calcul et équivalences usuelles pour manier des égalités/inégalités avec valeur absolue. Inégalités triangulaires. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (HP).

La première inégalité triangulaire a été démontrée, la seconde admise.

4.5 Définition de la partie entière à l'aide d'une proposition admise (mais très claire). Monotonie, constance sur les intervalles de la forme $[n, n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$. Équivalences et formules usuelles pour manier les égalités/inégalités faisant intervenir la partie entière.

4.6 Fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$: définition. Étude suggérée par un exercice (non corrigé à ce stade).

4.7 Annexe : interprétation graphique des égalités et inégalités.

Sommes et produits

4.8 Définition du symbole $\sum$. Vocabulaire (bornes, borne inférieure, borne supérieure, indice de sommation). L'indice de sommation est une variable locale (ou muette).

4.9 Notation relative aux intervalles entiers. Notations équivalentes : $\sum_{k=p}^{n}$, $\sum_{p \leq k \leq n}$ et $\sum_{k \in [\![p,n]\!]}$. Cardinal de l'intervalle entier $[\![p,n]\!]$. Sommes constantes.

4.10 Premières propriétés : linéarité de la somme, relation de Chasles. Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

4.11 Changements d'indice "par décalage". Sommes télescopiques. Changement d'indice "avec retournement".

4.12 Sommes géométriques.

Python

4.13 Import du module `numpy`, fonctions et constantes usuelles de ce module. Notion de fonction informatique. Notion de "renvoi", utilisation de `return`.

Quelques questions de cours

Élèves : il n'y a aucune faute typographique dans les questions sur les sommes, soyez attentifs.

1. Énoncer la définition de la racine carrée d'un réel positif, ainsi que toute proposition nécessaire. Énoncer et démontrer très précisément la formule relative à un produit de racines carrées. Expliquer, exemple à l'appui, la technique de la quantité conjuguée.
2. Définir la notion de puissance généralisée. Donner le domaine de définition de $x \mapsto x^\alpha$ en fonction de α. Énoncer et démontrer le résultat portant sur la dérivation de ces fonctions, ainsi que la formule "$x^\alpha x^\beta = ...$".
3. Énoncer les inégalités triangulaires, démontrer la première. Énoncer la proposition (90) relative aux équivalences

usuelles à utiliser dans la manipulation d'(in)égalités faisant intervenir la valeur absolue. Démontrer celles portant sur "$|x| \leq r$" (attention, deux cas ici).

4. Énoncer la définition de la partie entière d'un réel, ainsi que toute proposition nécessaire. Compléter et démontrer : $\forall x \in \ldots, \forall y \in \ldots, \lfloor x \rfloor \leq y \iff \ldots$. Toute variante similaire possible (prop 95).
5. Énoncer et démontrer (avec points de suspensions) la propriété de linéarité de la somme. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$, toute variante similaire possible.
6. Énoncer et démontrer (avec points de suspension) la relation de Chasles. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$.
7. Compléter et démontrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \ldots$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.
8. Énoncer et démontrer (avec points de suspensions) le résultat portant sur les changement d'indice par décalage. Calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(k-4)^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.
9. Énoncer et démontrer (sans points de suspensions) la formule portant sur les sommes téléscopiques. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \ln(\frac{k+1}{k})$.
10. Énoncer et démontrer (avec points de suspensions) le résultat portant sur les changements d'indice avec retournement. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
11. Énoncer et démontrer le résultat portant sur les sommes géométriques.