Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°3 : Sommes et produits

2024-2025
Mathématiques

Pour commencer

Exercice 1 Écrire sans le symbole $\sum$ ou $\prod$ les quantités suivantes (on ne demande pas de calculer leurs valeurs) :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 4$ (e) $\displaystyle\sum_{k=97}^{105} 2$ (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$ (m) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} 2$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(-1)^k$ (j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k$ (n) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} 2^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}$ (k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}+1$ (o) $\displaystyle\prod_{k=0}^{7}(2k+1)$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k}+1\right)$ (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k(k-1)$ (l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$ (p) $\displaystyle\prod_{k=1}^{6}\frac{k-1}{k}$

Exercice 2 Déterminer explicitement les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}-1$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$ (e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}k^2$ (g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$ (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2\times 3^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}k$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1)$ (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$ (j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}}$

Exercice 3 Déterminer explicitement les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\ln(k(k+1))$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$

Exercice 4 Démontrer les propositions suivantes :

(a) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$

(b) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3=(n+1)^2\left(2n^2+4n+1\right)$

(e) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=0}^{n}k\times(-1)^k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

(f) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

Exercice 5 Trouver $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$.

En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n.

Exercice 6 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{n}$.

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Retrouver ce résultat en calculant $(a-b)S_n$. En déduire une identité donnant $a^n - b^n$, généralisant :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Exercice 8

(a) Déterminer la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} - (k+1)x^k$ en fonction de x et de n.

(b) En déduire que $(1-x)\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1-(n+1)x^n + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

(c) En déduire, la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ en fonction de x et de n.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer les valeurs des produits suivants :

(a) $\prod_{k=1}^{n} 4^k$

(b) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$

(c) $\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

(d) $\prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$

(e) $\prod_{k=1}^{n} 2k$

(f) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1}$

(g) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

(h) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 10

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression $\frac{k}{k!}$. Le résultat obtenu est-il valable pour $k=0$?

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\frac{k!}{(k+1)!}$.

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k \times k! = (k+1)! - k\,!$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = \prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $Q = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.

Déterminer la valeur de P, puis celle de $P \times Q$ et en déduire la valeur de Q.

Exercice 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$.

Exercice 13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

(a) $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$.

(b) $T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$.

(c) $U_n = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \max(i,j)$.

Pour continuer

Exercice 15 Déterminer explicitement les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k(k-1)+1)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-1)$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}-2^k$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Exercice 16 Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, $\frac{1}{k(k^2-4)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} + \frac{c}{k+2}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\left(k^2-4\right)}$.

Exercice 17 Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)!-1$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n n\,!$

Exercice 18 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 19 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k x + b_k)^2$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est un trinôme du second degré et écrire sa forme développée.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k^2\right)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 20 *Un exercice important pour le cours de probabilités.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

(a) Exprimer $S_n(x)$ en fonction de x et n.

(b) Dans la suite, on fixe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$. Montrer que la fonction S_n est dérivable en x, et calculer $S_n'(x)$ de deux façons différentes.

(c) Montrer que S_n' est dérivable en x, et calculer $S_n''(x)$ de deux façons différentes.

(d) Déduire des questions précédentes les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2}$ Que valent ces sommes lorsque $x = 1$?

(e) Calculer, pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 x^k$.