Lycée Hoche
ECG1 A

2024-2025
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 1

*Devoir du **5 octobre 2024**.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Cours*

1. Soit x un réel. Considérons l'implication (P) suivante : $(\exists a \in \mathbb{R}_+, x^2 > (x+a)^2) \implies x < 0$.
   - (a) Donner la négation de (P) (sans justification).
   - (b) Donner la réciproque de (P) (sans justification).
   - (c) Donner la contraposée de (P) (sans justification).
   - (d) L'énoncé (P) est-il vrai ou faux? Le démontrer.
2. Tracer sans justification l'allure du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
3. Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle définie sur I.
   - (a) Soit $x_0 \in I$. Définir : f admet un maximum en x_0 sur I.
   - (b) Définir : f est minorée sur I. Définir la notion de minorant de f sur I.
4. Définir, en utilisant des quantificateurs, la notion de fonction injective sur une partie I de $\mathbb{R}$.
5. Soit f une fonction strictement croissante sur une partie I de $\mathbb{R}$.
   - (a) Démontrer : $\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.
   - (b) Démontrer : $\forall (x,y) \in I^2, x < y \iff f(x) < f(y)$.
   - (c) Quelles implications sous-jacentes aux énoncés précédents deviennent fausses *à priori* si f est seulement supposée croissante ? Donner un contre-exemple dans chaque cas.
6. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminée par :
$$\begin{cases} u_0 = 2, \ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}.$$
   Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$.
7. On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y + 1 = 0\}$ et $B = \{(t+1, 4t+5) | t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.
8. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer l'équivalence :
$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 1) \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \frac{u_n - 1}{3} = u_{n-1}\right).$$
9. Sans démonstration, quelle est la valeur de la variable `x` à la fin de l'exécution du code Python suivant ?

```
x=-4
k=1
for i in range(3,6):
        x=x+i
        k=2*k
if x>k:
        x=x-2
else:
        x=x+2
```

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ *Équations et inéquations. Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.*

1. Résoudre l'inéquation $\ln\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right) < 0$ (d'inconnue réelle x).
2. Résoudre l'équation $\sqrt{1-x} = 1+x$.
3. Résoudre l'inéquation $\ln(|2x+1|) > \ln(|1-x|)$.
4. On considère la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   (*a*) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   (*b*) Soit $t \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $2x + \dfrac{1}{x} = t$ d'inconnue réelle x, en fonction de t.
   (*c*) En déduire une expression des éventuels antécédents de t par f en fonction de t.
   (*d*) En déduire l'ensemble image $f(D_f)$ de D_f par f.
5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation (E_t) : $\dfrac{e^{2x}}{1-e^x} = t$ d'inconnue réelle x, en fonction de t.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

Partie I : Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Dans cet exercice, on s'intéresse aux fonctions ch : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}$ et sh : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}$, appelées respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

1. Justifier brièvement que les fonctions ch et sh sont correctement définies et dérivables.
2. (*a*) Étudier la parité de la fonction sh.
   (*b*) Dresser le tableau de variation de la fonction sh. Limites admises : $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
   (*c*) Déterminer le signe de la fonction sh.
3. (*a*) Étudier la parité de la fonction ch.
   (*b*) Dresser le tableau de variation de ch. Limites admises : $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
4. (*a*) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$.
   (*b*) Justifier l'existence de tangentes en 0 pour les courbes de ch et sh et déterminer ces tangentes.
   (*c*) Calculer et simplifier $\mathrm{ch}(\ln(2))$ et $\mathrm{sh}(\ln(2))$.
   (*d*) En tenant compte des résultats des questions précédentes, tracer sur un même graphique l'allure des courbes des fonctions ch et sh. Donnée : $\ln(2) \simeq 0,7$.
5. Calculer et simplifier, pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2$.
6. Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\mathrm{ch}(x)$.

On admet dans la suite *qu'on peut également démontrer :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y).$$

Partie II : Tangente hyperbolique

On considère la fonction "tangente hyperbolique" th définie par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

7. (a) Déterminer le domaine de définition de th.

   (b) Étudier la parité de th.

   (c) Dresser le tableau de variations de th. Limites admises : $\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.

8. (a) La fonction th est-elle minorée ? Est-elle majorée?

   (b) La fonction th admet-elle un minimum ? Admet-elle un maximum ?

9. On note, pour tout réel m, (E_m) l'équation $\mathrm{th}(x) = m$ d'inconnue réelle x.

   (a) À quelle condition équivalente sur m l'équation (E_m) admet-elle au moins une solution ?

   (b) On suppose cette condition vérifiée. Déterminer les solutions de (E_m) en fonction de m.

10. Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{th}(x + y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f puis son domaine de dérivabilité D'.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R}_+)$.
4. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$. Étudier le signe de g et montrer l'existence d'un unique réel positif ϕ tel que $g(\phi) = 0$. On donnera une expression de ϕ.
5. Montrer que $f([0, \phi]) \subset [0, \phi]$.

Soit $a \in D$ un réel fixé dans cet exercice. On considère la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

On rappelle que :

- *la suite u est dite croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$,*
- *la suite u est dite décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$,*
- *étudier la monotonie d'une suite, c'est étudier son caractère croissant ou décroissant.*

6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, le réel u_n est correctement défini par la relation de récurrence définissant la suite u, et que $u_n \geq 0$.
7. Dans cette question seulement, on suppose $a \in [0, \phi[$.

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \phi]$.

   (b) En déduire la monotonie de u.
8. Dans cette question seulement, on suppose $a > \phi$. Étudier la monotonie de u.
9. Que dire de la suite u si $a = \phi$?
10. Étudier la monotonie de u lorsque $a < 0$. *On pourra commencer par encadrer u_1.*

On rappelle que :

- *la suite u est dite majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$,*
- *la suite u est dite minorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, M \leq u_n$,*
- *le théorème de la limite monotone affirme que toute suite croissante et majorée admet une limite finie, et que toute suite décroissante et minorée admet une limite finie.*

11. Montrer que la suite u admet une limite finie, quelque soit $a \in D$.

Dans la question Python suivante, on suppose le module `numpy` de Python préalablement importé à l'aide de la commande :

```
import numpy as np
```

En particulier, on rappelle qu'alors, pour tout nombre positif `x`, la commande `np.sqrt(x)` renvoie la racine carrée de `x`.

On prendra dans la question suivante $a = 2$.

12. Écrire un code Python permettant d'afficher le texte suivant (et rien de plus) :

    `Pour n=10, terme :` u_{10}
    `Pour n=20, terme :` u_{20}
    `Pour n=100, terme :` u_{100}

    où u_{10}, u_{20} et u_{100} sont remplacés par les valeurs de ces réels.

Exercice 5

On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que, pour tous entiers relatifs a et b, on a : $a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$.

On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

2. Déduire de la question précédente : $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \exists!(a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on dispose (d'après la question précédente) d'uniques entiers relatifs a et b tels que $x = a + b\sqrt{2}$. On pose alors :

$$N(x) = a^2 - 2b^2.$$

On définit ainsi un entier $N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], N(x) = 0 \iff x = 0$.
4. Démontrer : $\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^2, xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $N(xy) = N(x)N(y)$.

On pose $U = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] | \exists y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], xy = 1\}$.

5. Démontrer que $U \subset \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] | N(x) = 1 \text{ ou } N(x) = -1\}$. *On pourra chercher à utiliser que $N(x)$ est un entier pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.*
6. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Déterminer un réel $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $N(x) = xy$.
7. En déduire que l'inclusion montrée question 5 est en fait une égalité.

Exercice 6

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Dans cet exercice, on pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f,$$

où le symbole f apparaît n fois.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, f^n est définie sur $\mathbb{R}_+$. *Attention, on ne demande pas de déterminer le domaine de définition de f^n, mais juste de montrer que celui-ci contient $\mathbb{R}_+$.*
2. Déterminer une expression simple de $f^n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Fin de l'énoncé —