

# Chapitre 4 : Généralités sur les suites réelles

ECG1 A, Lycée Hoche

## I. Notion de suite réelle

### 1. Définition

**Définition 1.** On appelle suite réelle  $u$  la donnée :

- (i) d'un ensemble  $E \subset \mathbb{N}$ , appelé ensemble d'indexation de la suite  $u$ , et
- (ii) d'un réel  $u_n$  pour tout élément  $n$  de  $E$ .

On note alors  $u = (u_n)_{n \in E}$ . Pour tout  $n \in E$ , on dit que le réel  $u_n$  est le terme de rang  $n$  de la suite  $u$ . On dit que  $u$  est une suite indexée par  $E$ .

**Exemple 2.** (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ . Cela définit une suite réelle  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , indexée par  $\mathbb{N}^*$ . On peut écrire :

$$v = \left( \frac{1}{n(n+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

(ii) La suite  $u = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est indexée par  $\mathbb{N}$ . Son terme de rang 10 est le réel  $u_{10} = 2^{10}$ .

(iii) La donnée  $w_n = \frac{1}{n(n-1)}$  pour tout  $n \geq 2$  définit une suite  $w$ , indexée par  $\mathbb{N}_{\geq 2}$ .

**Remarque. Notation :** Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{N}$ . On note  $\mathbb{R}^E$  l'ensemble des suites réelles indexées par  $E$  (on dit aussi : définies sur  $E$ ). C'est tout à fait cohérent avec la notation  $\mathbb{R}^D$  désignant l'ensemble des fonctions réelles de domaine de définition  $D$ . En effet, une suite  $u \in \mathbb{R}^E$  peut être vue comme une "application" (voir chapitre ultérieur : on généralisera la notion de fonction) de domaine de définition  $E$  :

$$u : \begin{array}{l|l} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto u_n \end{array}$$

dans le sens où la donnée de  $u$  revient à donner  $E$  et un réel  $u_n$  pour tout  $n \in E$ .

**Remarque. Attention,** comme pour les fonctions, ne confondez pas la suite  $u = (u_n)_{n \in E}$  avec le réel  $u_n$  (qui nécessite, pour être proprement défini, d'avoir fixé un entier  $n$  élément de  $E$ ).

**Remarque.** La majorité des suites rencontrées sont indexées par  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}^*$  ou une partie du type  $\mathbb{N}_{\geq n_0}$  pour un certain entier  $n_0$ , mais la définition permet à priori de considérer des suites dites finies, comme la suite n'ayant que 3 termes  $(2^k)_{k \in \{1,3,4\}}$ .

**Remarque.**  $(u_n)_{n \in E}$  se lit : " la suite des  $u_n$  pour  $n$  appartenant à  $E$ ".

**Remarque.** Si une suite  $u$  est définie sur un ensemble de la forme  $\mathbb{N}_{\geq n_0}$  pour un certain entier  $n_0$ , alors on note souvent  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ . Par exemple, il est correcte de parler de la suite  $\left( \frac{1}{n(n-1)} \right)_{n \geq 2}$ . La majorité des suites étudiées seront de ce type.

## 2. Comment se donner une suite réelle

### a) Par une formule

Pour se donner une suite  $u$ , il est très courant de donner une formule donnant le  $n$ -ième terme  $u_n$  de  $u$ , pour tout élément  $n$  de l'ensemble d'indexation de  $u$ .

Exemple : « Soit  $u$  la suite donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$  » définit la suite  $u$  donnée par :  $u = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Comme pour les fonctions, il faut être vigilant à l'ensemble d'indexation implicitement donné par la formule. Par exemple, la suite  $u$  définie par  $u_n = \frac{1}{n}$  est indexée par  $\mathbb{N}^*$ .

### b) Par une relation de récurrence

Pour définir une suite via une formule de récurrence, on se donne :

- Un certain nombre des premiers termes de cette suite,
- Une formule permettant, à partir des termes déjà connus, de calculer les suivants. Cette formule est appelée une relation de récurrence.

**Exemple 3.** « Soit  $u$  la suite donnée par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^n u_n \end{cases}$  » définit une suite  $u$  de premier terme  $u_0 = 1$ . La relation de récurrence est  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^n u_n$ , et définit bien la suite  $u$  intégralement :  
 $u_1 = 2^0 u_0 = 1$ , puis  $u_2 = 2^1 u_1 = 2$ , puis  $u_3 = 2^2 u_2 = 8$  etc. On voit ici que quelque soit la valeur de  $u_n$ ,  $u_{n+1}$  sera bien défini par  $u_{n+1} = 2^n u_n$ . En effet, le réel  $2^n x$  est bien défini pour tout entier  $n$  et pour tout réel  $x$ .

**Exemple 4.** On peut avoir des relations de récurrences dites "sur deux rangs" (ou plus), et il faut dans ce cas donner un nombre approprié de premiers termes.

Par exemple,  $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1} \end{cases}$  définit bien une suite  $u$  indexée par  $\mathbb{N}$  (on peut calculer  $u_2, u_3$  etc).

En revanche,  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1} \end{cases}$  ne définit pas de suite  $u$  (on ne peut même pas calculer le premier terme non connu  $u_1$ ).

Enfin, on peut recourir à une relation de récurrence "forte" pour définir une suite  $u$ , comme :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \end{cases} .$$

On trouve alors  $u_1 = u_0 = 1$ , puis  $u_2 = u_0 + u_1 = 2$ , puis  $u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4$  etc.

**Exemple 5.** Attention, rien ne garanti a priori qu'une suite donnée par une relation de récurrence soit définie pour tous les rangs suivant le premier terme donné. Considérons par exemple la suite  $u$  donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 - e \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 - u_n) \end{cases} .$$

L'application de la relation de récurrence donne  $u_1 = \ln(1 - (1 - e)) = 1$ . Alors,  $\ln(1 - 1)$  n'étant pas défini, le terme  $u_2$  n'est pas défini, et la suite  $u$  s'arrête alors à ce terme de rang 1 :  $u$  est une suite à deux termes, indexée par  $\{0, 1\}$ .

**Remarque.** On demandera souvent de montrer, pour une suite  $u$  définie par une relation de récurrence, que le terme  $u_n$  est défini (ou "existe") pour tout entier  $n$ .

Quelques exemples :

**Exemple 6.** Considérons la suite  $u$  définie par  $u_2 = 1$  et  $\forall n \geq 2, u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{n}$ . Montrons que  $u_n$  est bien défini pour tout  $n \geq 2$ .

Soit  $n \geq 2$ .

Alors, pour tout réel  $x$ ,  $2x - \frac{1}{n}$  est bien défini.

Ainsi, si  $u_n$  est bien défini, alors  $u_{n+1}$  l'est aussi, et ce pour tout  $n \geq 2$ .

De plus,  $u_2$  est bien défini par l'égalité  $u_2 = 1$ .

Une récurrence immédiate permet de conclure que  $u_n$  est bien défini pour tout entier  $n \geq 2$ .

En pratique, on rédige proprement la récurrence.

**Remarque.** Face à des "opérations interdites", on trouvera souvent une "**contrainte**" assurant que la relation de récurrence s'applique toujours, et on procèdera par **récurrence**.

**Exemple 7.** Soit  $u$  la suite donnée par  $u_0 = \frac{3}{4}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n(1-u_n)}$ . Montrons par récurrence que pour tout entier  $n$  :  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in [0, 1]$ .

Dans l'exemple précédent, la "contrainte" est  $u_n \in [0, 1]$  (pour tout  $n$ ).

**Exemple 8.** Montrons que la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$  est définie sur  $\mathbb{N}$ .

*Idee : On voit ici que  $u_n$  sera toujours positif (c'est une racine carrée), donc  $\sqrt{1+u_n}$  sera toujours défini. La contrainte, c'est la positivité. Une fois ceci vu, on procède systématiquement par récurrence.*

Montrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$  : " $u_n$  est bien défini et  $u_n \geq 0$ " (voir correction du DS01).

**Remarque.** La contrainte est parfois plus compliquée. Dans la grande majorité des cas, cette contrainte est l'appartenance à un intervalle.

**Remarque.** Si une suite est donnée par récurrence, le raisonnement par récurrence s'impose bien souvent pour démontrer vos premiers résultats sur cette suite.

**Exercice 9.** Soit  $u$  la suite donnée par  $u_0 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$ . Montrer que  $u_n$  est bien défini pour tout entier  $n$ .

### c) Suite définie de manière dite "implicite"

Si on définit un réel  $u_n$  pour tout entier  $n \in E$  (où  $E \subset \mathbb{N}$ ), alors on définit une suite  $(u_n)_{n \in E}$ . Une troisième manière commune de le faire est de le faire de manière dite "implicite" : en donnant une équation dont  $u_n$  est l'unique solution.

**Exemple 10.** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(x) \end{cases}$ .

(i) Étudions les variations de  $f$ .

(ii) Montrons que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution strictement positive, que l'on notera  $u_n$  dans la suite.

Dans cet exemple, on a défini un réel  $u_n$  pour tout entier naturel  $n$ . Autrement dit, on a défini la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 11.** Considérons, pour tout entier  $n$ , l'équation  $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$ .

(i) Montrer que  $(E_n)$  admet une unique solution positive, notée  $u_n$ , pour tout entier  $n$ .

(ii) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

(iii) En déduire que la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

### 3. Deux représentations graphiques des suites

#### a) Graphe d'une suite

On peut, comme pour une fonction, tracer le graphe d'une suite.

**Exemple 12.** Graphe de  $u = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Cela permet de visualiser les propriétés classiques des suites (monotonie, caractère borné, signe...).

#### b) Un tracé plus instructif pour les relations de récurrence type " $u_{n+1} = f(u_n)$ ".

Pour comprendre le comportement d'une suite  $u$  donnée par une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

où  $f$  est une fonction réelle, il est beaucoup plus judicieux de :

- tracer dans un même repère le graphe de  $f$  ainsi que la droite d'équation  $y = x$ ,
- placer, en abscisse, le premier terme connu de  $u$ ,
- utiliser les tracés pour placer, un par un, les termes suivants de  $u$ .

On remarquera que pour avoir un tracé précis de la première étape, on doit identifier les points d'intersection entre le graphe de  $f$  et la droite d'équation  $y = x$ . Autrement dit, on doit identifier les abscisses  $x$  pour lesquelles :

$$f(x) = x.$$

Vous comprendrez, à force d'exemples, que ces points jouent un rôle particulièrement important dans l'étude des suites définies par une telle relation de récurrence.

**Définition 13.** Soit  $f$  une fonction réelle, et  $x$  un point du domaine de définition de  $f$ . On dit que  $x$  est un *point fixe* de  $f$  si  $f(x) = x$ .

**Remarque.** La notion de point fixe **n'est pas au programme officiel**, mais c'est tout comme (les méthodes liées aux points fixes le sont).

**Exemple 14.** Plaçons les premiers termes de la suite  $u$  donnée par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ , à l'aide du graphe de  $t \mapsto \sqrt{t}$ .

**Exemple 15.** Plaçons les premiers termes de la suite  $u$  donnée par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$ , à l'aide du graphe de  $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ . Puis, démontrons que  $u_n$  est bien défini pour tout entier  $n$ .

## II. Propriétés des suites réelles

### 1. Suites majorées, minorées ou bornées

**Définition 16.** Soit  $u = (u_n)_{n \in E}$  une suite réelle.

(i) On dit que  $u$  est *minorée* si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in E, m \leq u_n.$$

On appelle *minorant* de  $u$  tout réel  $m$  tel que  $\forall n \in E, m \leq u_n$ .

(ii) On dit que  $u$  est *majorée* si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in E, u_n \leq M.$$

On appelle *majorant* de  $u$  tout réel  $M$  tel que  $\forall n \in E, u_n \leq M$ .

(iii) On dit que  $u$  est *bornée* si elle est majorée et minorée.

**Exemple 17.** (i) La suite  $((-1)^n)_n$  est bornée.

- (ii) Posons  $u_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $(u_n)_n$  est bornée, minorée par 0 et majorée par 1. En effet, pour tout entier  $n$ ,  $n^2 \geq 0$  et  $n^2 + 1 > 0$ , donc  $u_n \geq 0$ . De plus,  $u_n \leq 1 \iff n^2 \leq n^2 + 1$ , et la dernière inégalité est claire.
- (iii) Montrons que la suite  $v$  donnée par  $v_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$  est bornée, majorée par 2 et minorée par 0.

**Proposition 18.** Soit  $u = (u_n)_{n \in E}$  une suite réelle. On pose  $|u| = (|u_n|)_{n \in E}$ . Alors,  $u$  est bornée si et seulement si  $|u|$  est majorée. Autrement dit,  $u$  est bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in E, |u_n| \leq M.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

## 2. Suites monotones

Dans la suite du cours, on ne considère que des suites définies sur un ensemble de la forme  $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ , c'est-à-dire pour tous les rangs à partir du premier (ce sont ces suites qui, en pratique, nous intéressent). A ce titre, dans tous nos énoncés,  $n_0$  est un entier.

**Définition 19.** Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle.

(i) On dit que  $u$  est *croissante* si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n.$$

(ii) On dit que  $u$  est *strictement croissante* si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n.$$

(iii) On dit que  $u$  est *décroissante* si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n.$$

(iv) On dit que  $u$  est *strictement décroissante* si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} < u_n.$$

(v) On dit que  $u$  est *constante* si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n.$$

**Remarque.** En particulier, les suites à la fois croissantes et décroissantes sont exactement les suites constantes, car pour tous réels  $x, y$  :

$$x \leq y \text{ et } x \geq y \iff x = y.$$

Et tous les termes d'une suite constante sont égaux à son premier terme.

**Remarque.** Pour déterminer la monotonie d'une suite, on peut étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

**Exemple 20.** La suite  $(\frac{n}{n+1})_{n \geq 0}$  est-elle monotone?

**Remarque.** Si, pour tout  $n$  convenable, on a  $u_n > 0$ , alors on peut étudier  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et le comparer à 1. Cela peut être judicieux si la suite  $u$  est donnée via une formule "multiplicative".

**Exemple 21.** La suite  $(2^n n!)_n$  est-elle monotone?

**Remarque.** On peut également, pour démontrer un résultat de monotonie, procéder par récurrence.

**Exemple 22.** Soit  $(u_n)$  la suite donnée par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ . Démontrer que  $u$  est strictement monotone.

**Remarque.** Un argument parfois salutaire, qui peut s'appliquer pour des suites données par une formule  $(u_n = f(n))$  : celui de la monotonie de  $f$ . Par exemple, la fonction  $\ln$  est strictement croissante, donc la suite  $(\ln(n))_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

**Exemple 23.** Que dire de la monotonie de la suite  $u$  donnée par  $u_n = (-1)^n$  ?

**Exercice 24.** Considérons la suite  $u$  donnée, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = \frac{n}{n^2 + n + 1}$ . Montrer que  $u$  est bornée. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est monotone. La suite  $u$  est-elle monotone?

Voici une "méta-définition" que l'on utilisera bien souvent.

**Définition 25.** Soit  $P$  une propriété portant sur les suites réelles, et  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle dont on note  $n_0$  le premier terme. On dit que  $u$  vérifie  $P$  à partir d'un certain rang s'il existe un entier  $N \geq n_0$  tel que  $(u_n)_{n \geq N}$  vérifie  $P$ .

**Exemple 26.** Considérons une suite réelle  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  (où  $n_0$  est un entier.)

- $u$  est dite croissante à partir d'un certain rang si :

$$\exists N \geq n_0, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq u_n.$$

- $u$  est dite constante à partir d'un certain rang si :

$$\exists N \geq n_0, \forall n \geq N, u_{n+1} = u_n.$$

### III. Suites remarquables

Dans toute la suite,  $n_0$  est un entier naturel.

#### 1. Suites arithmétiques

**Définition 27.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. On dit que  $u$  est une *suite arithmétique* s'il existe un réel  $r$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n + r.$$

Dans ce cas, on dit que  $r$  et la *raison* de la suite arithmétique  $u$ .

**Remarque.** On démontre immédiatement que si une suite est arithmétique, le réel  $r$  de la définition est unique ( $r = u_{n_0+1} - u_{n_0}$ ), de sorte qu'il est cohérent de parler de **la** raison d'une telle suite.

On peut calculer le terme général d'une suite arithmétique en fonction de son premier terme et de sa raison.

**Proposition 28.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors :

$$\forall p \geq n_0, \forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 29.** Soit  $u$  la suite donnée par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2$ . Donner  $u_n$  en fonction de  $n$ .

La formule donnant la somme des  $n$  premiers entiers, ou l'argument de Gauss, permet de démontrer :

**Proposition 30.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite arithmétique. Alors, pour tous entiers  $p$  et  $n$  tels que  $n_0 \leq p \leq n$  :

$$\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \left( \frac{u_p + u_n}{2} \right).$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donc le nombre de termes multiplié par la moyenne des termes extrêmes.

## 2. Suite géométrique

**Définition 31.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. On dit que  $u$  est une *suite géométrique* s'il existe un réel  $q$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = qu_n.$$

Dans ce cas, on dit que la suite  $u$  est géométrique de *raison*  $q$ .

**Remarque.** On démontre immédiatement que si une suite est géométrique et non identiquement nulle, le réel  $q$  de la définition est unique ( $q = \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}$ ), de sorte qu'il serait cohérent de parler de **la** raison d'une telle suite. Mais la suite nulle  $(0)_{n \geq n_0}$  est géométrique de raison  $q$  pour tout réel  $q$ .

On peut calculer le terme général d'une suite géométrique en fonction de son premier terme et de sa raison.

**Proposition 32.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors :

$$\forall p \geq n_0, \forall n \geq p, u_n = q^{n-p}u_p.$$

**Démonstration.** Par récurrence (similaire au cas des suites arithmétiques, exercice).  $\square$

**Exemple 33.** Soit  $u$  la suite donnée par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$ . Donner  $u_n$  en fonction de  $n$ .

La proposition portant sur les sommes géométriques démontre immédiatement :

**Proposition 34.** Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ . Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq p}, \sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

**Démonstration.** En exercice.  $\square$

**Remarque.** Toute suite géométrique de raison 1 est constante (immédiat d'après la définition). Donc dans ce cas, la somme considérée dans la proposition précédente est une somme constante.

## 3. Suite arithmético-géométrique

**Définition 35.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. On dit que  $u$  est une *suite arithmético-géométrique* s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+1} = au_n + b.$$

**Exemple 36.** La suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$  est une suite arithmético-géométrique.

**Remarque.** Toute suite arithmétique ou géométrique est, en particulier, arithmético-géométrique.

**Méthode :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Pour calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+1} = au_n + b,$$

on procède de la manière suivante.

- Si  $a = 1$ ,  $u$  est arithmétique et on conclut avec la proposition 28.

- Sinon, on résout l'équation  $x = ax + b$ . Soit  $l$  l'unique solution de cette équation ( $l = \frac{b}{1-a}$ , à retrouver en une ligne).
- On pose, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $v_n = u_n - l$ .
- On démontre que la suite  $v$  est géométrique de raison  $a$ , en utilisant  $l = al + b$ .
- On utilise la proposition 32 pour déterminer une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- On écrit  $u_n = v_n + l$  pour avoir l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  recherchée.

**Remarque.** On pourrait écrire une proposition pour synthétiser cette méthode, mais c'est inutile car il est attendu que vous ayez compris la démarche, à refaire à chaque fois.

**Remarque.** Le réel  $l$  de la seconde étape est l'unique valeur possible que peut prendre une suite constante  $u$  vérifiant la relation de récurrence donnée. C'est une bonne manière de retenir et de retrouver l'idée.

**Exemple 37.** Déterminons une expression du terme général de la suite  $u$  donnée par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

**Exemple 38.** Déterminons une expression du terme général de la suite  $u$  donnée par  $u_0 = 2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

**Exercice 39.** Déterminer une expression du terme général de la suite  $u$  donnée par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n.$$

## 4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

### a) Définition

Soient  $u$  et  $v$  deux objets de même "nature" parmi les suivantes : des réels, des fonctions réelles, des suites réelles, des polynômes réels, des  $n$ -uplets de réels, des matrices réelles, des applications linéaires (et nous en passons)...

Alors, on appelle *combinaison linéaire* de  $u$  et  $v$  tout objet de la forme  $au + bv$  pour  $a$  et  $b$  des réels (qui est alors de même nature que  $u$  et  $v$ ). Le chapitre "Espaces vectoriels" est dédié à l'étude de cette notion.

Une relation de récurrence de la forme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  est dite :

- d'ordre 2, car elle donne un terme en fonction des deux termes précédents,
- linéaire, car  $u_{n+2}$  est donné comme une *combinaison linéaire* de  $u_{n+1}$  et  $u_n$ ,
- à coefficients constants, car les coefficients de cette combinaison linéaire sont des constantes ( $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $n$ ).

**Définition 40.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. On dit que  $u$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

**Exemple 41.** Évidemment, pour tous réels  $a$  et  $b$ , toute suite  $u$  donnée par une relation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

**Exemple 42.** En particulier, la suite de Fibonacci est la suite  $u$  donnée par  $u_0 = u_1 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.



**Exemple 43.** Pour tout entier  $n$ ,  $(-1)^{n+2} - 1 = (-1)^2(-1)^n - 1 = (-1)^n - 1$  donc si  $u = ((-1)^n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $u$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants car

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n.$$

On a donc l'égalité  $u_{n+2} = 0u_{n+1} + 1u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exemple 44.** Par contre, la suite  $u$  donnée par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n \end{cases}$$

n'est pas **à priori** une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Pour en être sûr, il faudrait démontrer que cette suite ne vérifie pas de telle relation de récurrence (on peut par exemple procéder par l'absurde), car aucun résultat vu n'assure une forme d'unicité d'une relation de récurrence vérifiée par une suite.

**Remarque.** On vérifie immédiatement que la suite nulle vérifie toute les relations de récurrence linéaires (d'ordre 2 par exemple) possibles.

**Remarque.** La terminologie étant un peu lourde, on se permet parfois de parler de "suite récurrence linéaire d'ordre 2" en omettant de préciser que les coefficients sont constants. En revanche, n'appliquez pas la méthode ci-après si les coefficients ne sont pas constants, comme dans l'exemple précédent.

## b) Calcul du terme général d'une telle suite

Pour donner une expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on va devoir commencer par résoudre une équation polynomiale de degré 2. La raison "profonde" à cela est la suivante.

**Proposition 45.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite géométrique non identiquement nulle de raison  $q \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$ , il est équivalent de dire :

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
- (ii)  $q^2 - aq - b = 0$ , i.e :  $q$  est solution de l'équation  $x^2 - ax - b = 0$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** On constate facilement la suite nulle vérifie toute relation de récurrence linéaire, il est nécessaire de l'exclure dans la proposition ci-dessus.

**Remarque.** Autrement dit, chercher les suites géométriques  $u$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  revient à résoudre l'équation  $x^2 - ax - b = 0$ .

**Définition 46.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle *équation caractéristique* associée à cette relation de récurrence l'équation polynomiale de degré 2 :

$$x^2 - ax - b = 0$$

d'inconnue réelle  $x$ .

**Théorème 47.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et  $a$  et  $b$  deux réels non tous nuls tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Notons

$$(E) : x^2 - ax - b$$

l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence, et  $\Delta$  son discriminant. Alors :

(i) Supposons  $\Delta > 0$ , et soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions distinctes de (E). Alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(ii) Supposons  $\Delta = 0$ , et soit  $r$  l'unique solutions de (E). Alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_n = (\lambda + \mu n)r^n$$

(iii) Si  $\Delta < 0$ , l'utilisation des complexes permet de conclure, mais c'est hors programme.

**Démonstration.** À suivre.  $\square$

**Remarque.** Le théorème ne s'applique pas pour  $a = b = 0$ . Mais ça ne fait rien.

**Remarque.** Si  $a = b = 0$ , la relation de récurrence " $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ " se "résout" immédiatement : la suite  $u$  est alors nulle à partir de son 3e terme (seuls ses deux termes initiaux peuvent être non nuls). En effet :

**Exercice 48. Exo important de logique, doit être faisable de tête :** Soit  $u$  une suite réelle indexée par  $\mathbb{N}$ . Démontrer :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0) \iff (\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, u_n = 0).$$

Vous devez savoir appliquer ce théorème 47 jusqu'à déterminer une expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

**Méthode :** Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et  $a$  et  $b$  deux réels non tous nuls tels que

$$\forall n \geq n_0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Pour déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :

- On calcul le discriminant de l'équation caractéristique de cette relation de récurrence. Si celui-ci est négatif, on s'arrête car on ne sait pas conclure.
- On applique le théorème ci-dessus : il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que... (écrire ici la conclusion du théorème, selon le cas présent).
- Il reste alors à déterminer les valeurs explicites de  $\lambda$  et  $\mu$ . Pour cela, on fait un système linéaire à l'aide de deux termes de la suite  $u$ , généralement les deux premiers, généralement  $u_0$  et  $u_1$ .

**Exemple 49.** Déterminons une expression du  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci, en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple 50.** Soit  $u$  la suite donnée par  $u_0 = 2, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$ . Déterminons une expression de  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 51.** Soit  $u$  la suite donnée par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ . Déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 52.** Soit  $v$  la suite donnée par  $v_0 = 1, v_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{v_{n+1}^4}{v_n^3}$ .

(i) Montrer que pour tout entier  $n, v_n$  est bien défini et strictement positif.

(ii) On pose, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \ln(v_n)$ . Que dire de la suite  $u$ ?

(iii) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

## 5. Démonstration du théorème 47

Dans toute cette partie, on démontre le théorème 47. On considérera des suites définies sur  $\mathbb{N}$  (c'est-à-dire le cas  $n_0 = 0$ ) pour simplifier l'écriture de la démonstration, mais celle-ci se transpose telle quelle aux suites définies sur  $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ , *mutatis mutandis*.

Dans toute cette partie, on fixe  $a$  et  $b$  deux réels non tous nuls. Pour toute suite  $u$ , on note  $R(u)$  la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Cela définit une proposition à paramètres  $R$ , et on dira que " $u$  vérifie la relation de récurrence  $R$ " si  $R(u)$  est vraie, autrement dit si  $u$  vérifie la relation de récurrence donnée.

*Idée. L'idée de cette démonstration est de construire une suite de la forme donnée par le théorème, ayant les mêmes deux premiers termes que  $u$ , et de conclure à l'aide de la proposition 53.*

### a) Les lemmes

**Proposition 53.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles vérifiant la relation de récurrence  $R$ . Si  $u_0 = v_0$  et  $u_1 = v_1$ , alors  $u = v$ , c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n.$$

**Démonstration.** C'est une récurrence immédiate sur deux rangs, à noter.  $\square$

**Remarque.** En particulier, d'après cette proposition, l'unique suite  $u$  vérifiant  $R$  telle que  $u_0 = u_1 = 0$  est la suite nulle (car la suite nulle vérifie  $R$ ).

**Proposition 54.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites vérifiant la relation de récurrence  $R$ . Alors, pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , la suite  $w$  donnée par  $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ) vérifie la relation de récurrence  $R$ .

**Remarque.** On dit que l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (ici, à coefficients constants) est stable par combinaison linéaire. On dira aussi que c'est un *sous-espace vectoriel* de l'ensemble des suites réelles.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

Voilà pour les théorèmes dits "de structure" de l'ensemble des suites vérifiant  $R$ .

Les deux propositions suivantes s'intéressent aux suites de la forme données par le théorème.

**Proposition 55.** Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence  $R$ .

(i) Supposons  $\Delta > 0$  et soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions distinctes de cette équation caractéristique. Alors, pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , la suite  $w$  donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

vérifie la relation de récurrence  $R$ .

(ii) Supposons  $\Delta = 0$  et soit  $r$  l'unique solution de cette équation caractéristique. Alors, pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , la suite  $w$  donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = (\lambda + \mu n)r^n$$

vérifie la relation de récurrence  $R$ .

Ainsi, les suites mentionnées par le théorème 47 vérifient la relation de récurrence considérée.

**Démonstration.** C'est une conséquence d'un petit calcul et de la proposition 54, à noter.  $\square$

**Remarque.** Cete démonstration utilise les relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2, dont nous reparlerons dans le prochain chapitre.

**Proposition 56.** Soient  $u_0$  et  $u_1$  deux réels.

(i) Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux réels distincts. Alors, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\begin{cases} \lambda r_1^0 + \mu r_1^0 = u_0 \\ \lambda r_1^1 + \mu r_1^1 = u_1 \end{cases} .$$

(ii) Soit  $r$  un réel non nul. Alors, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu \times 0)r^0 = u_0 \\ (\lambda + \mu \times 1)r^1 = u_1 \end{cases} .$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** On a au passage démontré, dans chaque cas, l'unicité de ces réels  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Remarque.** Cette démonstration utilise les techniques de résolution des systèmes linéaires, que l'on verra dans deux chapitres.

## b) Démonstration du théorème 47

Soit  $u$  une suite vérifiant la relation de récurrence  $R$ .

Notons  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique de  $R$ . On en traite donc pas le cas  $\Delta < 0$ .

**1e cas :** si  $\Delta > 0$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions distinctes de cette équation caractéristique.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels tels que :

$$\begin{cases} \lambda r_1^0 + \mu r_1^0 = u_0 \\ \lambda r_1^1 + \mu r_1^1 = u_1 \end{cases}$$

dont l'existence est garantie par la proposition 56 ( $r_1$  et  $r_2$  étant bien distincts, la proposition s'applique).

D'après la proposition 55, la suite  $w$  donnée par  $w_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$  (pour tout entier  $n$ ) vérifie la relation de récurrence  $R$ .

D'après le choix de  $\lambda$  et  $\mu$ , on a de plus  $w_0 = u_0$  et  $w_1 = u_1$ . Ainsi,  $u$  et  $w$  sont deux suites vérifiant  $R$  telles que  $u_0 = w_0$  et  $u_1 = w_1$ .

D'après la proposition 53,  $u = w$ . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Ceci démontre le théorème dans ce premier cas.

**2e cas :** si  $\Delta = 0$ . Soit  $r$  l'unique solution de cette équation caractéristique. Alors,  $r \neq 0$  car  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux nuls (si on avait  $r = 0$ , alors on aurait  $(x - 0)^2 = x^2 - ax - b$  pour tout réel  $x$ , c'est absurde).

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels tels que :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu \times 0)r^0 = u_0 \\ (\lambda + \mu \times 1)r^1 = u_1 \end{cases} .$$

dont l'existence est garantie par la proposition 56 ( $r \neq 0$ ).

D'après la proposition 55, la suite  $w$  donnée par  $w_n = (\lambda + \mu n)r^n$  (pour tout entier  $n$ ) vérifie la relation de récurrence  $R$ .

D'après le choix de  $\lambda$  et  $\mu$ , on a de plus  $w_0 = u_0$  et  $w_1 = u_1$ .

Ainsi,  $u$  et  $w$  sont deux suites vérifiant  $R$  telles que  $u_0 = w_0$  et  $u_1 = w_1$ .  
D'après la proposition 53,  $u = w$ . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Ceci démontre le théorème dans ce second cas, ce qui termine la démonstration.

## IV. Annexe : quelques démonstrations

### 1. Démonstration de la proposition 28

Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors :

$$\forall p \geq n_0, \forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

Reprenons les notations de l'énoncé.

Soit  $p \geq n_0$  un entier naturel.

Montrons par récurrence :

$$\forall n \geq p, P(n) : "u_n = u_p + (n - p)r".$$

Initialisation :  $P(p)$  s'écrit :  $u_p = u_p + (p - p)r$ , ce qui est clair car  $p - p = 0$ .

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $P(n)$  et montrons  $P(n + 1)$ .

On doit donc montrer  $u_{n+1} = u_p + (n + 1 - p)r$ .

$u$  étant arithmétique de raison  $r$  :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

D'après  $P(n)$ ,  $u_n = u_p + (n - p)r$ .

Finalement ces deux égalités donnent :

$$u_{n+1} = u_p + (n - p)r + r = u_p + (n + 1 - p)r.$$

Ceci démontre  $P(n + 1)$ , d'où l'hérédité.

### 2. Démonstration de la proposition 32

Soit  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors :

$$\forall p \geq n_0, \forall n \geq p, u_n = q^{n-p}u_p.$$

Reprenons les notations de l'énoncé.

Soit  $p \geq n_0$  un entier naturel.

Montrons par récurrence :

$$\forall n \geq p, P(n) : "u_n = u_p q^{n-p}."$$

Initialisation :  $P(p)$  s'écrit :  $u_p = u_p q^{p-p}$ , ce qui est clair car  $p - p = 0$  donc  $q^{p-p} = 1$ .

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $P(n)$  et montrons  $P(n + 1)$ .

On doit donc montrer  $u_{n+1} = u_p q^{n+1-p}$ .

$u$  étant géométrique de raison  $q$  :

$$u_{n+1} = u_n q.$$

D'après  $P(n)$ ,  $u_n = u_p q^{n-p}$ .

Finalement ces deux égalités donnent :

$$u_{n+1} = u_p q^{n-p} q = u_p q^{n+1-p}.$$

Ceci démontre  $P(n+1)$ , d'où l'hérédité.