Programme de colle n^o 5 : Sommes et produits. Généralités sur les suites réelles.

*Semaine du lundi **14 octobre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Sommets et produits (suite et fin)

5.1 Notation $\sum_{i\in I} a_i$, où I est un ensemble fini. Notation $\sum_{\substack{i\in I\\ P(i)}} a_i$, où I est un ensemble fini et $(P(i))_{i\in I}$ une proposition à paramètre sur I. Manipulation courantes pour les sommes de la forme $\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} a_k$ et $\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} a_k$.

Pas de question théorique sur la notation $\sum_{i\in I}$.

5.2 Produits et notation $\prod_{k=p}^{n} a_k$. Propriétés calculatoires. Changements d'indice, produits télescopiques.

Démonstrations non vues en cours, les élèves doivent au moins pouvoir les retrouver avec des points de suspensions.

5.3 Factorielle d'un entier. Propriétés dites "de morphisme" de l'exponentielle et du logarithme pour les sommes et produits finis. Sommation d'inégalités, produits d'inégalités à membres tous positifs. Produit et valeur absolue. Inégalité triangulaire généralisée aux sommes finies.

5.4 Exemples de double sommes (incluant des triangulaires), notations liées aux doubles sommes, permutation des sommes. Développement généralisé (admis).

Généralités sur les suites réelles

5.5 Notion de suite réelle. Ensemble d'indexation. Ensemble $\mathbb{R}^E$ des suites réelles indexées par E (où E est une partie de $\mathbb{N}$). Définition d'une suite $(u_n)_{n\in E}$ par une formule donnant u_n pour tout $n \in E$. Définition d'une suite $(u_n)_n$ par récurrence et exemples de justifications de la bonne définition de u_n pour tout n convenable. Suites définies de manière implicite : exemples.

5.6 Représentation graphique d'une suite $(u_n)_n$ en plaçant les points (n, u_n). Représentation graphique propre aux suites définies par une relations de récurrences de la forme "$u_{n+1} = f(u_n)$", à l'aide du tracé du graphe de f et de la droite d'équation $y = x$.

5.7 Suites majorées, minorées, bornées. Caractérisation des suites bornées à l'aide de la valeur absolue.

5.8 Suites monotones et strictement monotones, suites constantes. Suites monotones à partir d'un certain rang.

Suites remarquables

5.9 Suites arithmétiques : définition, raison d'une suite arithmétique, formule donnant le terme général.

Python

5.10 Fonctions. Boucles while, premiers algorithmes sur les listes (simples utilisation des syntaxes `L[i]`, `len(L)`,`L.append(...)` et des boucles `for` pour remplir une liste, aucun algorithme plus complexe n'a été vu jusqu'ici).

Quelques questions de cours

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Compléter et démontrer avec points de suspension : $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} u_k = \ldots$ et $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} u_k = \ldots$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $P = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k$ et $I = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k$. Calculer P et en déduire I.
3. Énoncer les propriétés calculatoires liées au symbole $\prod$ (prop. 43). Énoncer et démontrer, à l'aide de ces propriétés, les formules donnant $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \lambda a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k}$.
4. Énoncer les propriétés "de morphisme" de l'exponentielle et du logarithmes généralisées aux sommes et produits finis. En démontrer une, au choix de l'interrogation.
5. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire (prop. 56 (ii)) pour les sommes finies.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$.
7. Soit u la suite donnée par $u_0 = \dfrac{3}{4}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n(1-u_n)}$. Montrer que u_n est bien défini pour tout entier naturel n.
8. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n, et que $u_n \in [0,1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
9. Énoncer et démontrer la caractérisation des suites bornées utilisant la valeur absolue.
10. Définir la notion de suite arithmétique. Compléter et démontrer : si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$, on a : $u_n = \ldots$.