Lycée Hoche
ECG1A

2024-2025
Mathématiques

Corrigé du DS n°1

*DS du **5 octobre**.*

Exercice 1

1. (a) $\boxed{\text{La négation de } (P) \text{ est : } (\exists a \in \mathbb{R}_+, x^2 > (x+a)^2) \text{ et } x \geq 0.}$

   (b) $\boxed{\text{La réciproque de } (P) \text{ est : } x < 0 \implies (\exists a \in \mathbb{R}_+, x^2 > (x+a)^2).}$

   (c) $\boxed{\text{La contraposée de } (P) \text{ est : } x \geq 0 \implies \forall a \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq (x+a)^2.}$

   (d) Montrons que (P) est vraie.

   Démontrons plutôt la contraposée de (P) donnée à la question précédente.

   Supposons donc $x \geq 0$, et montrons : $\forall a \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq (x+a)^2$.

   Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

   $0 \leq a$ donc $x \leq x + a$. De plus, $x \geq 0$ et $x + a \geq 0$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a donc :

   $x^2 \leq (x+a)^2$.

   Ceci démontre bien : $\forall a \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq (x+a)^2$, sous l'hypothèse $x \geq 0$.

   On a donc bien démontré la contraposée de (P).

   $\boxed{(P) \text{ est donc vraie.}}$

2. Voir cours.
3. Voir cours.
4. Voir cours.
5. Voir cours. Pour les contre-exemples du (c), on pouvait simplement considérer une fonction constante.
6. Voir exemple similaire dans le cours (chapitre 1, exemple 66).
7. Procédons par double inclusion.

   - Montrons $A \subset B$.

     Soit $a \in A$, montrons $a \in B$.

     $a \in A$ donc on dispose de réels x et y tels que $a = (x, y)$ et $4x - y + 1 = 0$.

     Posons $t = x - 1$, de sorte que $x = t + 1$. $4x - y + 1 = 0$ donc $y = 4x + 1 = 4(t+1) + 1 = 4t + 5$.

     On a donc trouvé un réel t tel que $a = (t + 1, 4t + 5)$.

     Par définition de B, ceci prouve $a \in B$.

     On a donc montré : $\forall a \in A, a \in B$, d'où $\boxed{A \subset B.}$

   - Montrons $B \subset A$.

     Soit $b \in B$, montrons $b \in A$.

     $b \in B$ donc on dispose d'un réel t tel que $b = (t + 1, 4t + 5)$.

     Vérifions que $b = (t + 1, 4t + 5) \in A$.

     $4(t + 1) - (4t + 5) + 1 = 4t + 4 - 4t - 5 + 1 = 0$.

     Cette égalité montre $b \in A$.

     $\boxed{\text{On a donc bien montré } B \subset A.}$

Finalement, par double inclusion, $\boxed{\text{on a bien montré } A = B.}$

8. Notons $P : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 1$ et $Q : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \dfrac{u_n - 1}{3} = u_{n-1}$.

   Démontrons $P \iff Q$ par double inclusion.

   - Montrons $P \implies Q$.

     Supposons P et montrons $Q : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \dfrac{u_n - 1}{3} = u_{n-1}$.

     Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

     D'après P : $\forall t \in \mathbb{N}, u_{t+2} = 3u_{t+1} + 1$.

     En particulier, $n - 2 \geq 0$ (car $n \geq 2$) donc :

     $$u_{(n-2)+2} = 3u_{(n-2)+1} + 1.$$

     On a donc $u_n = 3u_{n-1} + 1$, d'où $\dfrac{u_n - 1}{3} = u_{n-1}$.

     Ceci étant vrai pour tout $n \geq 2$, on a bien démontré Q en supposant P.

     $\boxed{\text{D'où } P \implies Q.}$

   - Montrons $Q \implies P$.

     Supposons Q, et montrons P.

     Soit $n \in \mathbb{N}$.

     $n + 2 \geq 2$ (car $n \geq 0$) donc d'après Q : $\dfrac{u_{n+2} - 1}{3} = u_{n+1}$.

     On a donc $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 1$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui démontre P.

     $\boxed{\text{On a donc bien montré } Q \implies P.}$

     Par double implication, $\boxed{\text{on a donc démontré } P \iff Q.}$

9. $\boxed{\text{A la fin de l'exécution de ce code, \texttt{x} a pour valeur 10.}}$

Exercice 2

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x = x(x+1)$ donc un bref tableau de signe (**à faire**, avec pour lignes les signes de x, $x + 1$ et $\dfrac{1}{x^2+x}$) montre que pour tout réel x, $\dfrac{1}{x^2+x}$ est bien défini et strictement positif si et seulement si $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

   $t \mapsto \ln(t)$ ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$:

   L'inéquation (I) : $\ln\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right) < 0$ a pour domaine de définition $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

   Soit $x \in D$.

   $$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{x^2+x}\right) < 0 &\overset{(1)}{\iff} \frac{1}{x^2+x} < e^0 = 1 \\ &\overset{(2)}{\iff} 1 < x^2 + x \\ &\iff x^2 + x - 1 > 0. \end{aligned}$$

   (1) : par croissance stricte de l'exponentielle.

   (2) : $x \in D$ donc $x^2 + x > 0$.

Le polynôme X^2+X-1 a pour discriminant 5 donc admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On a ici $x_1 < x_2$ (car $\sqrt{5} > 0$). Le coefficient dominant de ce polynôme étant positif, par théorème :

$$x^2+x-1>0 \iff x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2,+\infty[.$$

Ainsi, x est solution de (I) si et seulement si $x \in A :=]-\infty, x_1[\cup]x_2,+\infty[$, et ce pour tout $x \in D$.

Pour finir, $A \subset D$ car pour tout $a \in A$, $a^2+a>1$ donc $a^2+a>0$ donc $\dfrac{1}{a^2+a} > 0$ donc $a \in D$.

On pouvait aussi justifier que $x_1 < -1$ et $0 < x_2$ en utilisant $\sqrt{5} > 1$).

Donc $\boxed{\text{l'ensemble } S \text{ des solutions de } (I) \text{ est } S = D \cap A = A =]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty[.}$

2. Notons (E) l'équation $\sqrt{1-x} = 1+x$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, 1-x \geq 0 \iff x \leq 1$ donc, $x \mapsto \sqrt{x}$ ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}_+$, l'équation (E) a pour domaine de définition $D =]-\infty, 1]$.

   Soit $x \in D$.

   - 1e cas : si $x < -1$.

     Dans ce cas, $1+x<0$ et $\sqrt{1-x} \geq 0$ donc l'égalité $\sqrt{1-x} = 1+x$ est fausse et x n'est donc pas solution de (E).

   - 2e cas : sinon, $x \in [-1, 1]$.

     Dans ce cas, $1+x \geq 0$ et $\sqrt{1-x} \geq 0$ donc par croissance stricte de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

     $$\sqrt{1-x} = 1+x \iff 1-x = (1+x)^2.$$

     Or,

     $$1-x = (1+x)^2 \iff x^2+3x = 0 \iff x(x+3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -3 \iff x = 0 \in [-1, 1].$$

     (la dernière équivalence étant justifiée par $x \in [-1, 1]$).

     Ainsi, (E) n'admet pas de solution sur $]-\infty, -1]$ et admet comme unique solution 0 sur $[-1, 1]$.

     $\boxed{\text{Finalement, } (E) \text{ admet } 0 \text{ comme unique solution.}}$

3. Par positivité de la valeur absolue :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} |2x+1| > 0 \\ |1-x| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |2x+1| \neq 0 \\ |1-x| \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

   ln ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, l'inéquation (I) : $\ln(|2x+1|) > \ln(|1-x|)$ a pour domaine de définition $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

   Soit $x \in D$.

   Par croissante stricte de l'exponentielle :

   $$\ln(|2x+1|) > \ln(|1-x|) \iff |2x+1| > |1-x|.$$

   Par croissance stricte de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

   $$|2x+1| > |1-x| \iff |2x+1|^2 > |1-x|^2.$$

   Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\ln(|2x+1|) > \ln(|1-x|) &\iff |2x+1|^2 > |1-x|^2 \\
&\iff (2x+1)^2 > (1-x)^2 \\
&\iff 4x^2+4x+1 > x^2-2x+1 \\
&\iff 3x^2+6x > 0 \\
&\iff 3x(x+2) > 0 \\
&\iff x \in A :=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{L'ensemble } S \text{ des solutions de } (I) \text{ est donc : } S = D \cap A =]-\infty,-2[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[.}$

4. (a) $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+$ donc par quotient, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour domaine de définition $D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+ | \sqrt{x} \neq 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ a pour domaine de définition } D_f = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*}$, en tant que combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   (b) L'équation $(E_t) : 2x + \dfrac{1}{x} = t$ a clairement pour domaine $\mathbb{R}^*$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$2x + \frac{1}{x} = t \overset{(x\neq 0)}{\iff} 2x^2+1 = tx \iff 2x^2 - tx + 1 = 0.$$

   Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, x est solution de (E) si et seulement si x est racine du polynôme $2X^2 - tX + 1$.

   Le polynôme du second degré $P_t(X) = 2X^2 - tX + 1$ a pour discriminant $\Delta_t = t^2 - 8 = (t-2\sqrt{2})(t+2\sqrt{2})$.

   Un rapide tableau de signe montre $\Delta_t < 0 \iff t \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$.

   On procède donc à une disjonction des cas.

   - 1e cas : si $t \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$, alors $D_t < 0$ donc P_t n'a pas de racine, donc (E_t) n'a pas de solutions.
   - 2e cas : si $t = -2\sqrt{2}$ ou $t = 2\sqrt{2}$.

     Alors $\Delta_t = 0$ donc P_t a comme unique racine $\dfrac{t}{4}$.

     Dans ce cas, $\dfrac{t}{4} \in \mathbb{R}^*$ donc $\dfrac{t}{4}$ est l'unique solution de (E).
   - 3e cas : sinon, $t \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$.

     Dans ce cas, $\Delta_t > 0$ donc $P_t(X)$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{t - \sqrt{t^2-8}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{t+\sqrt{t^2-8}}{4}.$$

     Alors, $x_1 \in \mathbb{R}^*$ et $x_2 \in \mathbb{R}^*$ car $P_t(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $P_t(X)$.

     Donc dans ce cas, les solutions de (E) sont x_1 et x_2.

Conclusion :

- Si $t \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$, alors (E_t) n'a pas de solutions.
- Si $t = 2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E_t) est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Si $t = -2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E_t) est $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Si $t \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$, (E_t) a exactement deux solutions :

$$\frac{t - \sqrt{t^2 - 8}}{4} \text{ et } \frac{t + \sqrt{t^2 - 8}}{4}.$$

(c) On remarque tout d'abord que f est à valeurs strictement positives, car $\forall x \in D_f, \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}$.

Cette remarque fait gagner pas mal de temps, mais on peut faire sans.

Ainsi, si $t \leq 0$, alors t n'a pas d'antécédent par f.

Supposons maintenant $t > 0$.

Pour tout $x \in D_f$, x est un antécédent de t si et seulement si $f(x) = t$.

Or :

$$\forall x \in D_f, f(x) = t \iff 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = t \iff \text{“}\sqrt{x} \text{ est solution de } (E_t)\text{”}.$$

On procède donc à une disjonction des cas, à l'aide des résultats de la question précédente.

- 1e cas : Si $t \in]0, 2\sqrt{2}[$, alors (E_t) n'a pas de solutions, donc t n'a pas d'antécédent par f.
- 2e cas : Si $t = 2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E_t) est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$) donc :

$$\forall x \in D_f, f(x) = t \iff \sqrt{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{(x>0)}{\iff} x = \frac{1}{2}.$$

  $\dfrac{1}{2} \in D_f$ donc $\dfrac{1}{2}$ est l'unique antécédent de t par f dans ce cas.

- 4e cas : Si $t > 2\sqrt{2}$, alors les deux solutions de (E_t) sont :

$$x_1 = \frac{t - \sqrt{t^2 - 8}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{t + \sqrt{t^2 - 8}}{4}.$$

  Dans ce cas, $t^2 > 8$ donc $0 < t^2 - 8 < t^2$ donc par croissance stricte de la racine carrée et vu $t \geq 0$:

$$0 < \sqrt{t^2 - 8} < t.$$

  Ceci montre que $0 < x_1$, et on a donc $0 < x_1 < x_2$ ($x_1 < x_2$ car $\sqrt{t^2 - 8} > 0$).

  Ainsi, les antécédents de t par f sont les réels $x > 0$ tels que $\sqrt{x} = x_1$ ou $\sqrt{x} = x_2$, c'est-à-dire :

$$x_1^2 = \frac{2t^2 - 8 - 2t\sqrt{t^2 - 8}}{16} = \frac{t^2 - 4 - t\sqrt{t^2 - 8}}{8} \text{ et } x_2^2 = \frac{t^2 - 4 + t\sqrt{t^2 - 8}}{8}.$$

Conclusion : Revenons au cas général.

- Si $t < 2\sqrt{2}$, alors t n'a pas d'antécédent par f.
- Si $t = 2\sqrt{2}$, l'unique antécédent de t par f est $\dfrac{1}{2}$.
- Si $t > 2\sqrt{2}$, t admet exactement deux antécédents par f :

$$\frac{t^2 - 4 - t\sqrt{t^2 - 8}}{8} \text{ et } \frac{t^2 - 4 + t\sqrt{t^2 - 8}}{8}.$$

(*d*) D'après la question précédente, un réel t admet un antécédent par f si et seulement s'il vérifie $t \geq 2\sqrt{2}$.

Donc $\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = [2\sqrt{2}, +\infty[.}$

5. L'équation (E_t) admet comme domaine de définition $\mathbb{R}^*$ car : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^x = 0 \iff x = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, x est solution de (E_t) si et seulement si $\dfrac{e^{2x}}{1-e^x} = t$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2x}}{1-e^x} = t &\iff e^{2x} = t - te^x \\
&\iff (e^x)^2 + te^x - t = 0 \\
&\iff \text{“}e^x \text{ est racine de } X^2 + tX - t''.
\end{aligned}$$

Le polynôme du second degré $X^2 + tX - t$ admet pour discriminant $\Delta_t = t^2 + 4t = t(t+4)$. On peut donc établir le **tableau de signe** de Δ_t :

- Si $t \in]-4, 0[$, alors $\Delta_t < 0$.
- Si $t \in \{-4, 0\}$, alors $\Delta_t = 0$.
- Si $t \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$, alors $\Delta_t > 0$.

On procède donc à une disjonction des cas.

- 1e cas : Si $t \in]-4, 0[$, alors $X^2 + tX - t$ n'a pas de racine, donc (E_t) n'a pas de solutions.
- 2e cas : Si $t = 0$, $(E_t) : \dfrac{e^{2x}}{1-e^x} = 0$ n'a pas de solutions car $\forall x \in \mathbb{R}^*, e^{2x} \neq 0$.
- 3e cas : Si $t = -4$, alors l'unique racine de $X^2 + tX - t$ est $\dfrac{-t}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$. Or,
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, e^x = 2 \iff x = \ln(2) \in \mathbb{R}^*.$$
Donc dans ce cas, (E_t) admet $\ln(2)$ comme unique solution.
- 4e cas : Sinon, $t \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$ et $X^2 + tX - t$ admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-t + \sqrt{t^2+4t}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-t - \sqrt{t^2+4t}}{2}.$$
Déterminons le signe de x_1 et x_2.

  Premier sous cas : Si $t > 0$, alors $t^2 + 4t > t^2$ donc $\sqrt{t^2+4t} > |t| = t$ donc $x_1 > 0$. Et $x_2 < 0$ est clair car le numérateur de x_2 est somme de nombres strictement négatifs (et $2 > 0$).

  Alors pour tout réel x :
$$\begin{aligned}
e^x \text{ est racine de } X^2 + tX - t &\iff e^x = x_1 \text{ ou } e^x = x_2 \\
&\overset{(x_2<0 \text{ et } e^x>0)}{\iff} e^x = x_1 \\
&\overset{(x_1>0)}{\iff} x = \ln(x_1)
\end{aligned}$$

  Second sous cas : Sinon, $t < -4$ et cette fois, $x_1 > 0$ est clair. De plus :

  $t^2 + 4t < t^2$ (car $t < 0$),

  donc $\sqrt{t^2+4t} < |t| = -t$,

  donc $x_2 > 0$.

  Donc pour tout réel x:
$$\begin{aligned}
e^x \text{ est racine de } X^2 + tX - t &\iff e^x = x_1 \text{ ou } e^x = x_2 \\
&\overset{(x_1>0 \text{ et } x_2>0)}{\iff} x = \ln(x_1) \text{ ou } x = \ln(x_2)
\end{aligned}$$

Pour finir, vérifions que dans les sous cas concernés, $\ln(x_1)$ et $\ln(x_2)$ fournissent bien une solution.

$$\ln(x_1) \in \mathbb{R}^* \iff x_1 \neq 1$$

et :

$$x_1 = 1 \iff \sqrt{t^2+4t} = t+2.$$

Or, $(t+2)^2 = t^2+4t+4 \neq t^2+4t$ car $4 \neq 0$.

Donc $t+2 \neq \sqrt{t^2+4t}$, donc $\ln(x_1) \in \mathbb{R}^*$.

De même en supposant cette fois $t < -4$:

$$\ln(x_2) \in \mathbb{R}^* \iff x_2 \neq 1$$

et

$$x_2 = 1 \iff -\sqrt{t^2+4t} = t+2.$$

Or, $(t+2)^2 = t^2+4t+4 \neq t^2+4t = (-\sqrt{t^2+4t})^2$, donc l'égalité $-\sqrt{t^2+4t} = t+2$ est fausse. Donc $\ln(x_2) \in \mathbb{R}^*$.

Par conséquent :

Conclusion :

- Si $t = -4$, l'unique solution de (E_t) est $\ln(2)$.
- Si $t \in]0, +\infty[$, l'unique solution de (E_t) est $\ln\left(\frac{-t+\sqrt{t^2+4t}}{2}\right)$.
- Si $t \in]-\infty, -4[$, (E_t) admet deux solutions : $\ln\left(\frac{-t+\sqrt{t^2+4t}}{2}\right)$ et $\ln\left(\frac{-t-\sqrt{t^2+4t}}{2}\right)$.
- Sinon, (E_t) n'a pas de solutions.

Exercice 3

1. $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Donc $x \mapsto e^{-x}$ l'est également par composition.

   Ainsi, ch et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Le domaine de définition de sh est $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.

   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\mathrm{sh}(x).$$

   Donc $\boxed{\text{sh est impaire.}}$

   (b) On a déjà montré la dérivabilité de sh. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

   De plus, par positivité stricte de l'exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0.$$

   Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) > 0.$$

   Par théorème, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{On a donc le tableau de variation suivant :}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Pour tout réel x :

$$\text{sh}(x) > 0 \iff e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \overset{(1)}{\iff} x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0.$$

(1) : par croissance stricte de l'exponentielle.

Une équivalence similaire avec des égalités donne $\boxed{\text{le tableau de signe suivant}}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

3. (a) Le domaine de définition $\mathbb{R}$ de ch est symétrique par rapport à 0, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x+}e^{x}}{2} = \text{ch}(x).$$

Donc $\boxed{\text{ch est paire.}}$

(b) ch est dérivable d'après la question 1, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \text{sh}(x).$$

D'après le tableau de signe de la fonction $\text{ch}' = \text{sh}$ donné en 2.c), $\boxed{\text{on a le tableau de variation suivant}}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$(\text{ch}(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1)$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'équivalences :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) > \text{sh}(x) &\iff e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x} \\ &\iff e^{-x} > -e^{-x} \\ &\iff 2e^{-x} > 0 \qquad\qquad \iff e^{-x} > 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie par positivité stricte de l'exponentielle, donc :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) > \text{sh}(x).}$

(b) $\boxed{\text{ch et sh sont dérivables en 0 donc leurs courbes admettent une tangente en 0.}}$

Par définition, la tangente T_1 à la courbe de ch en 0 est la droite d'équation:

$$y = \text{ch}(0) + x\text{ch}'(0)$$

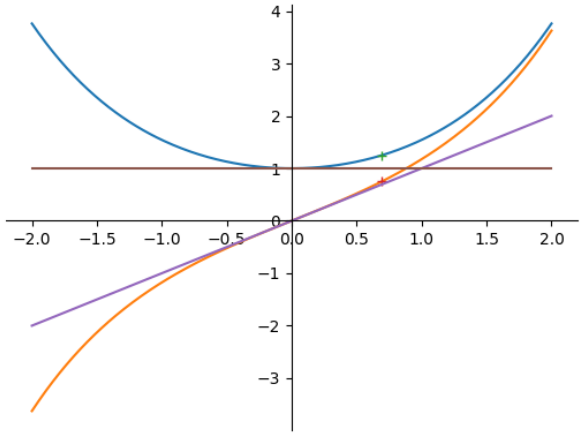
$\text{ch}(0) = 1$ et $\text{ch}'(0) = \text{sh}(0) = 0$ donc cette équation est : $\boxed{(T_1) : y = 1.}$

De même, $\text{sh}(0) = 0$ et $\text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1$ donc la tangente (T_2) à la courbe de sh en 0 est la droite d'équation : $\boxed{(T_2) y = x.}$

(c) $\boxed{\text{ch}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}}$ et :

$\boxed{\text{sh}(\ln(2)) = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}.}$

(*d*) *Il faut prendre en compte les résultats des questions 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c. A rajouter sur votre copie par rapport à ce dessin : noter les coordonnées des deux points (placer* $\ln(2)$ *en abscisse et* $3/4$ *et* $5/4$ *en ordonnée).*



5. Pour tout réel x :

$$\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(2e^0 + 2e^0) = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1.}$

6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)\operatorname{sh}(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})}{4} \\
&= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} + e^y e^x + e^y e^{-x} - e^{-y} e^x - e^{-y} e^{-x}}{4} \\
&= \frac{2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \operatorname{sh}(x + y).
\end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)\operatorname{sh}(x).}$

7. (*a*) D'après son tableau de variation, la fonction ch admet un minimum en 0 valant 1.

   En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \neq 0$.

   ch et sh étant définies sur $\mathbb{R}$:

   $\boxed{\text{la fonction th a pour domaine de définition } \mathbb{R},}$ en tant que quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

   (*b*) Le domaine de définition $\mathbb{R}$ de th est symétrique par rapport à 0, et d'après les parités des fonctions ch et sh :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x).$$

   Donc $\boxed{\text{th est impaire.}}$

   (*c*) th est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}$$

(en utilisant le résultat de la question 5).

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x)^2 > 0$ (car $\mathrm{ch}(x) > 1$ pour tout x).

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}'(x) > 0$.

th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{d'où le tableau de variation}}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	1

(*d*) La fonction th est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par théorème, on a :

$$\mathrm{th}(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{t\to-\infty} \mathrm{th}(t), \lim_{t\to+\infty} \mathrm{th}(t)[=]-1, 1[.$$

Ceci montre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \mathrm{th}(x) < 1.$$

$\boxed{\text{th est donc bornée, minorée par } -1 \text{ et majorée par } 1.}$

(*e*) Montrons que th n'admet pas de maximum.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_0 < x_0 + 1$ et th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{th}(x_0) < \mathrm{th}(x_0 + 1)$.

Ainsi, th n'a pas de maximum en x_0, et ce pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\text{th n'a pas de maximum sur } \mathbb{R}.}$

De même, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x_0 - 1) < \mathrm{th}(x_0)$ donc th n'a pas de minimum en x_0.

Donc $\boxed{\text{th n'a pas de minimum sur } \mathbb{R}.}$

8. (*a*) Soit $m \in \mathbb{R}$.

On a montré dans la question 8a) que $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

Donc m admet un antécédent par th si et seulement si $m \in]-1, 1[$.

Donc $\boxed{\text{l'équation } (E_m) \text{ admet (au moins) une solution si et seulement si } m \in]-1, 1[.}$

(*b*) Soit $m \in]-1, 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) = m &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = m \\
&\iff e^x - e^{-x} = m(e^x + e^{-x}) \\
&\iff (1 - m)e^x = (1 + m)e^{-x} \\
&\overset{(e^x \neq 0)}{\iff} (1 - m)(e^x)^2 = 1 + m \\
&\overset{(m \neq 1)}{\iff} e^{2x} = \frac{1 + m}{1 - m} \\
&\overset{(1)}{\iff} 2x = \ln(\frac{1 + m}{1 - m}) \\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + m}{1 - m}).
\end{aligned}$$

(1) : $\dfrac{1 + m}{1 - m} > 0$ car $1 + m > 0$ et $1 - m > 0$ car $m \in]-1, 1[$.

$\boxed{\text{L'unique solution de } (E_m) \text{ est } \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + m}{1 - m}).}$

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   D'après le résultat de la question 6., ainsi que le résultat admis après cette question :

$$\text{th}(x+y) = \frac{\text{sh}(x+y)}{\text{ch}(x+y)} = \frac{\text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(y)\text{ch}(x)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)}.$$

   D'autre part :

$$\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\text{th}(y)} = \frac{\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} + \frac{\text{sh}(y)}{\text{ch}(y)}}{1 + \frac{\text{sh}(x)\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y)}} = \frac{\frac{\text{sh}(x)\text{ch}(y)+\text{sh}(y)\text{ch}(x)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y)}}{\frac{\text{ch}(x)\text{ch}(y)+\text{sh}(x)\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y)}} = \frac{\text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(y)\text{ch}(x)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)}.$$

$$\boxed{\text{On a donc bien montré } \text{th}(x+y) = \frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\text{th}(y)}, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 4

1. $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour domaine de définition R_+ et pour domaine de dérivabilité $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction affine $x \mapsto x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   De plus, pour tout réel x :

$$\begin{cases} x + 1 \in \mathbb{R}_+ \iff x \geq -1 \\ x + 1 \in \mathbb{R}_+^* \iff x > -1 \end{cases}.$$

   Par composition, $\boxed{f \text{ a pour domaine de définition } D = [-1, +\infty[\text{ et pour domaine de dérivabilité } D' =]-1, +\infty[.}$

2. $\mathbb{R}_+ \subset D'$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$$

   (car $x \geq 0 \implies x + 1 \geq 1 > 0 \implies \sqrt{x+1} > 0$).

   Par théorème, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

3. *On aurait pu passer par un théorème de la bijection monotone, en donnant la limite en $+\infty$.*

   Par définition, $f(\mathbb{R}_+) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) = y\}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \geq 1$ donc $f(x) = \sqrt{1+x} \geq \sqrt{1} = 1$.

   Ainsi : $\forall y \in f(\mathbb{R}_+), y \in [1, +\infty[$.

   Donc $f(\mathbb{R}_+) \subset [1, +\infty[$.

   Réciproquement, pour tout $y \geq 1$, si on pose $x = y^2 - 1 \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = |y| = y$ ce qui monte $y \in f(\mathbb{R}_+)$.

   Ainsi : $[1, +\infty[\subset f(\mathbb{R}_+)$.

   Finalement par double inclusion : $\boxed{f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[.}$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} g(x) > 0 &\iff \sqrt{x+1} > x \\ &\iff x + 1 > x^2 \\ &\iff x^2 - x - 1 < 0 \end{aligned}$$

   Ces équivalences sont également vraies en remplaçant ces inégalités par des égalités.

   Le polynôme $X^2 - X - 1$ admet pour discriminant 5 donc pour racines $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\gamma = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (ces inégalités proviennent de $\sqrt{5} > 1$).

Son coefficient dominant est positif, donc pour tout réel x :

$$x^2 - x - 1 < 0 \iff x \in]\gamma, \phi[.$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) > 0 \iff x \in]\gamma, \phi[.$$

$\boxed{\text{Le tableau de signe de } g \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ est donc donné par :}}$

x	0		ϕ		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{L'unique réel positif } \phi \text{ tel que } g(\phi) = 0 \text{ est } \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

5. Montrons $f([0, \phi]) \subset [0, \phi]$.

   Soit $y \in f([0, \phi])$. Montrons $y \in [0, \phi]$.

   $[0, \phi] \subset \mathbb{R}_+$ donc $y \in f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$ (question 3), donc $y \geq 1$.

   Par définition, on dispose de $x \in [0, \phi]$ tel que $y = f(x)$.

   Alors $x \leq \phi$ donc par croissance de f, $y = f(x) \leq f(\phi) = \phi$ (car $f(\phi) - \phi = g(\phi) = 0$).

   Finalement, $1 \leq y \leq \phi$.

   Donc $y \in [0, \phi]$.

   $\boxed{\text{On a bien montré } f([0, \phi] \subset [0, \phi].}$

6. Notons, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ la proposition : " u_n est bien défini et $u_n \geq 0$".

   Montrons par récurrence : $\forall n \geq 1, P(n)$".

   - Initialisation : $u_0 = a \in D$ donc u_1 est bien défini par la relation $u_1 = f(u_0)$.

     De plus, f est à valeurs positives donc $u_1 = f(a) \geq 0$.

     Ceci démontre $P(1)$, d'où l'initialisation.

   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

     Par $P(n)$, u_n est bien défini et positif. En particulier, $u_n \in D$. Donc $f(u_n)$ est bien défini, donc u_{n+1} est bien défini par la relation de récurrence donnée.

     De plus, $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ car f est à valeurs positives.

     On a donc montré $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

   $\boxed{\text{Par récurrence, on a bien montré que pour tout entier } n \geq 1, u_n \text{ est bien défini par la relation de récurrence donnée e}}$

7. (a) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$u_n \in [0, \phi]$".

   - Initialisation : $u_0 = a \in [0, \phi]$ par hypothèse dans cette question. D'où l'initialisation.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

     Par $P(n)$, $u_n \in [0, \phi]$.

     D'après la question 5, $f([0, \phi]) \subset [0, \phi]$.

     Donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, \phi]$.

     D'où l'hérédité.

   $\boxed{\text{On a bien montré par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \phi].}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   D'après la question précédente, $u_n \in [0, \phi]$.

   D'après le tableau de signe de g, on a donc $f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$.

Donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{On a donc montré que la suite } u \text{ est croissante, si } a \in [0, \phi].}$

8. On procède en deux étapes comme dans la question précédente.

   Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$u_n > \phi$".

   - Initialisation : $u_0 = a > \phi$ par hypothèse dans cette question, d'où l'initialisation.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

     Par $P(n)$, $u_n > \phi$ donc par croissance stricte de f, $u_{n+1} = f(u_n) > f(\phi) = \phi$.

     On a donc montré $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \phi$.

   g étant strictement négative sur $]\phi, +\infty[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$f(u_n) - u_n = g(u_n) < 0$$

   donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

   $\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc (strictement) décroissante dans le cas où } a > \phi.}$

9. Si $a = \phi$, une récurrence immédiate montre que la suite u est la suite constante de valeur ϕ.

   Rédigez si brièvement (comme ci-dessous) à vos risques et périls et uniquement pour des récurrences très faciles ET dans le cadre d'un DS où vous avez déjà montré plus d'une fois votre capacité à rédiger proprement des récurrences. Là vous avez la rédaction la plus minimale possible pour une récurrence (rédaction qui serait vraiment lourde à adapter pour une hérédité plus conséquente), on ne peut rien enlever de plus.

   En effet, pour l'initialisation, $u_0 = a = \phi$.

   Pour l'hérédité :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi \implies f(u_n) = f(\phi) \implies u_{n+1} = \phi$$

   car $f(\phi) = \phi$.

   Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi$.

   $\boxed{\text{Si } a = \phi, \text{ la suite } u \text{ est constante de valeur } \phi, \text{ i.e. : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi.}$

10. Si $a < 0$, alors $-1 \leq a = u_0 < 0$ (car $a \in D$) donc par croissance de f :

    $$f(-1) = 0 \leq u_1 = f(u_0) \leq f(0) = 1.$$

    En particulier, on aurait $u_1 \in [0, \phi]$ (car $1 \leq \phi$).

    Posons $v_n = u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $v_0 = u_1 \in [0, \phi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les même hypothèse que la suite u dans le cadre de la question 7.

    D'après cette question, on a donc que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

    Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = v_{n+1} \geq v_n = u_{n+1}$.

    Donc $\forall n \geq 1, u_{n+1} \geq u_n$.

    De plus, $u_1 \geq 0 < u_0$ donc $u_1 \geq u_0$.

    Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

    Ainsi, $\boxed{\text{si } a < 0, \text{ alors } u \text{ est croissante.}}$

11. - Si $a \geq \phi$, alors u est décroissante (questions 8 et 9) et minorée par ϕ (démontré lors de la question 8) donc admet une limite finie, par limite monotone.

- Si $a < \phi$, u est croissante (questions 7b et 11). D'après la question 7a), u est majorée par ϕ si $a \in [0, \phi[$.

  La récurrence de la question 7a) s'adapte de suite pour montrer que ϕ majore u dans le cas $a \in [-1, 0[$.

  D'après le théorème de la limite monotone, u admet donc une limite finie.

$\boxed{\text{Dans tous les cas, } u \text{ admet une limite finie.}}$

12. *Vous pouviez faire sans définir la fonction* `f`.

```
def f(x):
        return np.sqrt(x+1)

u=2
for i in range(1,101):
        u=f(u)
        if (i == 10 or i == 20 or i == 100) :
                print("Pour n=" , i , ", terme : " , u)
```

Exercice 5

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

   Supposons $a + b\sqrt{2} = 0$.

   Supposons par l'absurde que : $b \neq 0$.

   On aurait $b\sqrt{2} = -a$ et $b \neq 0$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{-a}{b}$ ce qui est absurde ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

   Ceci démontre $b = 0$.

   L'égalité $a + b\sqrt{2} = 0$ devient alors $a = 0$.

   $\boxed{\text{On a bien montré : } \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0.}$

2. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   Montrons : $\exists! (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}$.

   Existence : La proposition : $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}$ est claire, par définition de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et car $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. D'où l'existence voulue.

   Unicité : Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de $\mathbb{Z}^2$ tels que $x = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$.

   Montrons $(a, b) = (a', b')$.

   On a $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ donc $\begin{cases} (a - a') + (b - b')\sqrt{2} = 0 \\ (a - a', b - b') \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$.

   D'après la question précédente, $a - a' = b - b' = 0$.

   Ceci montre $a = a'$ et $b = b'$, c'est-à-dire $(a, b) = (a', b')$, d'où l'unicité voulue.

   Conclusion :

   On a bien montre $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \exists! (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}.}$

3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   Montrons $N(x) = 0 \iff x = 0$.

   Tout d'abord, si $x = 0$, alors l'écriture $x = 0 + 0 \times \sqrt{2}$ montre que $N(x) = 0^2 - 2 \times 0^2 = 0$, d'où :

   $$x = 0 \implies N(x) = 0.$$

   Réciproquement, supposons $N(x) = 0$ et soient (a, b) l'unique couple d'entiers tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

   On a alors $a^2 - 2b^2 = 0$.

Si l'on avait $b \neq 0$, on aurait $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{|a|}{|b|}$ ce qui est absurde ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

On a donc nécessairement $b = 0$ et par suite, $N(x) = 0$ donne $a = 0$.

Donc $x = 0 + 0\sqrt{2} = 0$, d'où la réciproque voulue.

On a bien montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], N(x) = 0 \iff x = 0.}$

4. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   Soient a, b, c et d les entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x = a + b\sqrt{2} \\ y = c + d\sqrt{2} \end{cases}$.

   Alors, $xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(ad + bc)$.

   De plus, $ac + 2bd$ et $ad + bc$ sont entiers comme somme de produits d'entiers.

   Cela montre : $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, xy = u + v\sqrt{2}$.

   Donc $xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   De plus par définition de $N(xy)$ et vue l'écriture précédente :

   $N(xy) = (ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = a^2c^2+4abcd+4b^2d^2-2(a^2d^2+2abcd+b^2c^2) = a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2+4b^2d^2.$

   D'autre part :
   $$N(x)N(y) = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 4b^2d^2.$$

   On a donc bien $N(xy) = N(x)N(y)$.

   Finalement :

   $\boxed{\text{on a bien montré } xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ et } N(xy) = N(x)N(y), \text{ et ce pour tous } x \text{ et } y \text{ éléments de } \mathbb{Z}[\sqrt{2}].}$

5. Soit $x \in U$.

   Par définition, $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et on dispose de $y ßn \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $xy = 1$.

   D'après la question précédente, $N(1) = N(xy) = N(x)N(y)$.

   Mais $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ montre que $1 \in \mathbb{Z}(\sqrt{2}]$ et $N(1) = 1$.

   Donc $N(x)N(y) = 1$.

   Donc $|N(x)| \times |N(y)| = 1$, et $|N(x)|$ et $|N(y)|$ sont des entiers naturels.

   Un rapide raisonnement par l'absurde montre que $|N(x)| = 1$ (on ne peut avoir $|N(x)| = 0$ ou $|N(y)| = 0$, sinon on aurait $|N(x)| \times |N(y)| = 0$, et si on avait $|N(x)| > 1$, on aurait $|N(x)| \times |N(y)| > |N(y)| \geq 1$ ce qui contredit $|N(x)| \times |N(y)| = 1$.)

   Ainsi, $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.

   Donc $x \in \{t \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] | N(t) = 1 \text{ ou } N(t) = -1\}$, et ce pour tout $x \in U$.

   $\boxed{\text{On a donc bien montré : } U \subset \{t \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] | N(t) = 1 \text{ ou } N(t) = -1\}.}$

6. Soit $x \in \mathbb{Z}(\sqrt{2}]$ et a et b entiers tels que $x = a + b\sqrt{2}$.

   On remarque que $N(x) = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})$.

   Donc $\boxed{\text{en posant } y = a - b\sqrt{2}, \text{ on a } y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \text{ tel que : } xy = N(x).}$

7. Montrons l'inclusion $U \supset \{t \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] | N(t) = 1 \text{ ou } N(t) = -1\}$.

   Soit $x \in \{t \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] | N(t) = 1 \text{ ou } N(t) = -1\}$.

   On a donc $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.

   D'après la question précédente, on dispose de $y \in \mathbb{Z}(\sqrt{2}]$ tel que $xy = N(x)$.

- 1e cas : si $N(x)=1$, alors $xy=N(x)=1$ et $y\in Z[\sqrt{2}]$.

  Donc : $\exists t\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}], xt=1$.

  Donc $x\in U$.
- 2e cas : sinon, $N(x)=-1$ et alors :

$$x(-y)=-xy=-N(x)=1 \text{ et } -y=-a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

  Donc: $\exists t\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}], xt=1$.

  Donc $x\in U$.

Dans tous les cas, on a $x\in U$.

Ceci démontre l'inclusion voulue, d'où :

$\boxed{U=\{t\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]|N(t)=1 \text{ ou } N(t)=-1\}}$

Exercice 6

1. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(n)$ la proposition : "f^n est définie sur $\mathbb{R}_+$".

   Montrons par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$.

   - Initialisation : Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $1+x\geq 1$ donc $1+x\neq 0$.

     Donc $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ est un réel bien défini, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

     Donc $f^1=f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, d'où l'initialisation.
   - Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

     Soit $x\in\mathbb{R}_+$, montrons que $f^n(x)$ est un réel bien défini.

     D'après l'initialisation, f est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(x)$ est bien défini, et par ailleurs $f(x)\in\mathbb{R}_+$ car $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1+x\geq 1>0 \end{cases}$.

     Par $P(n)$, f^n est définie sur $\mathbb{R}_+$.

     Avec $f(x)\in\mathbb{R}_+$, on a donc que $f^n(f(x))$ est un réel bien défini.

     Donc $f^{n+1}(x)$ est un réel bien défini, et ce pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

     Ainsi, f^{n+1} est définie sur $\mathbb{R}_+$, d'où l'hérédité.

   On a bien montré par récurrence que $\boxed{f^n \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+ \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.}$

2. *Il faut chercher au brouillon pour trouver la formule générale, assez simple. Par exemple, on calcule :* $f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=...=\dfrac{x}{1+2x}$.

   Puis on recommence : $f^3(x)=f^2(f(x))=\dfrac{f(x)}{1+2f(x)}=...=\dfrac{x}{1+3x}$.

   On "espère alors" $f^n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$. *On doit penser à une preuve par récurrence car cette démarche passe par* f*, puis* f^2*, puis* f^3*...*

   Il faut enfin bien poser l'hypothèse de récurrence, avec "le $\forall x\in\mathbb{R}_+$ *dans* $P(n)$*".*

   Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(n)$: "$\forall x\in\mathbb{R}_+, f^n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$".

   Montrons par récurrence :$\forall n\in\mathbb{N}^*, P(n)$.

   - Initialisation : Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1+1\times x}.$$

D'où l'initialisation.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons donc $f^{n+1}(x) = \dfrac{x}{1+(n+1)x}$ pour conclure.

  Par hypothèse de récurrence :
  $$\forall y \in \mathbb{R}_+, f^n(y) = \frac{y}{1+ny}.$$

  De plus, on a montré en question précédente que $f(x) \in \mathbb{R}_+$ (car $x \in \mathbb{R}_+$).

  Donc :
  $$f^n(f(x)) = \frac{f(x)}{1+nf(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+n\frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x+nx}{1+x}} = \frac{x}{1+(n+1)x}.$$

  Donc $f^{n+1}(x) = \dfrac{x}{1+(n+1)x}$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

  Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

  Finalement, on a bien montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

  $\boxed{f^n(x) = \dfrac{x}{1+nx}.}$

— Fin du corrigé —