Chapitre 3 : Sommes et produits

ECG1 A, Lycée Hoche

L'idée de ce chapitre est d'introduire des notations relatives aux sommes et aux produits de réels, afin de pouvoir écrire de belles égalités pour des sommes de longueur variable, comme l'égalité pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

traduisant l'égalité moins précisément décrite par :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

I. Le symbole $\sum$

1. Sommes de réels

Définition 1. Soient n et p deux entiers tels que $n \geq p$. Soient $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ des réels. On note $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$ la somme de ces réels :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_n.$$

"$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$ " se lit "la somme, pour k variant de p à n, des a_k". On dit que p est la borne inférieure de cette somme, et n sa borne supérieure.

Exemple 2.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) =$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (2k+1) =$
- $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{j}{j+1} =$
- $\displaystyle\sum_{j=3}^{6} 2 =$
- Soit $j \in \mathbb{N}$. Alors, $\displaystyle\sum_{i=-2}^{2} 2^j =$
- $\displaystyle\sum_{i=-2}^{2} 2^i =$

Remarque. (*i*) Les entiers p et n sont appelés les *bornes* de la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$. Pour que cette écriture soit légitime, ces bornes doivent être des *entiers* (éventuellement négatifs, semi HP) et dans l'ordre croissant ($p \leq n$). Ainsi, les écritures $\displaystyle\sum_{k=2}^{\frac{10}{3}} 2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=3}^{1} 2^k$ n'ont pas de sens.

(*ii*) Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée *l'indice de sommation.* C'est une variable dite *muette* (ou *locale*) : l'utilisation du symbole k requiert que la lettre k ne soit pas fixée auparavant, sa quantification est fixée par les bornes de la somme, et son utilisation ne fixe aucune variable k. Autrement dit, Si

- aucune variable k et j n'a été fixée auparavant,
- n et p sont des entiers fixées tels que $p \leq n$,

alors on peut écrire :

$$\sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{k=p}^{n} a_k$$

et l'utilisation du symbole k ou j n'a alors aucune influence sur le reste du texte.

(*iii*) En particulier, l'indice de sommation étant une variable muette, on n'écrira jamais : "Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\sum_{k=1}^{10} 2^k = \dots$" car la première phrase sert à fixer une variable k pour la suite du texte, alors que k devient une variable locale dans la phrase suivante. Pour écrire ce symbole somme, on a besoin de "pouvoir faire varier k" (k ne doit pas être fixé).

(*iv*) En particulier, l'écriture $k\sum_{k=1}^{5} 2^k$ **ne peut pas avoir de sens**. En effet,

- Ou bien k est n'est pas fixée auparavant. Alors, la somme écrite ci-dessus est correctement définie. Le symbole k n'est alors pas défini hors de la somme : on ne peut pas multiplier ce k non défini avec le réel parfaitement défini $\sum_{k=1}^{5} 2^k$.
- Ou bien k est une variable fixée, auquel cas la somme écrite ci-dessus est mal définie (quelle est l'ambiguïté?).

Même remarque : $\sum_{k=1}^{k^2} 2^k$ ne peut pas avoir de sens.

Définition 3. Soient n et p deux entiers relatifs. On appelle *intervalle entier* d'extrémités p et n l'ensemble noté $[\![p, n]\!]$ donné par :

$$[\![p, n]\!] = \{x \in \mathbb{Z} | p \leq x \leq n\}.$$

On note aussi :

$$[\![p, +\infty[\![= \{x \in \mathbb{Z} | p \leq x\} \text{ et }]\!] - \infty, n]\!] = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq n\}.$$

Exemple 4. Si $n \geq 2$, $[\![2, n]\!] = \{2, 3, \dots, n\}$.
Si $p \leq n$, $[\![p, n]\!] = \{p, p+1, \dots, n-1, n\}$.
Si $p > n$, $[\![p, n]\!] = \emptyset$.

Notations équivalentes

Soient p et n deux entiers tels que $p \leq n$. On trouve les notations équivalentes suivantes, pour tous réels $x_p, x_{p+1}, \dots x_n$:

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k \in [\![p,n]\!]} x_k = \sum_{p \leq k \leq n} x_k.$$

2. Propriétés du symbole $\sum$

a) Sommes constantes

On commence par une remarque **à bien avoir en tête** (piège classique).

Proposition 5. *Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$. Alors,*

$$[\![p, n]\!] = \{p, p+1, \ldots, n-1, n\}$$

est un ensemble fini contenant $n-p+1$ entiers.

Démonstration. Vérifiez simplement : le nombre l d'entiers entre p et n (inclus) vérifie $p+(l-1)=n$.
□

Exemple 6. Il y a bien 12 entiers dans $[\![3, 14]\!]$. "N'oubliez pas d'ajouter 1."

Proposition 7. *Soient p et n deux entiers tels que $p \leq n$. Alors, pour tout réel a :*

$$\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Les sommes de cette forme sont appelées sommes constantes, pour des raisons assez claires.

$$\sum_{k=p}^{n} a = \overbrace{(n-p+1)}^{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{a}_{\text{valeur du terme constant}}.$$

Exemple 8. (*i*) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} 1 =$

(*ii*) Pour tout réel x, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (2x+1) =$

(*iii*) Pour tout entier k, $\displaystyle\sum_{l=2}^{12} 2^k =$

b) Propriétés calculatoires de la somme

Commençons à traduire les propriétés connues de la somme en terme d'utilisation du symbole $\sum$.

Proposition 9. Relations de linéarité de la somme. *Soient n et p des entiers tels que $p \leq n$. Soient $a_p, \ldots, a_n$ des réels. Alors :*

(i) Pour tous réels $b_p, \ldots, b_n$:

$$\sum_{k=p}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=p}^{n} b_k\right).$$

(ii) Pour tout réel λ :

$$\sum_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k.$$

Plus généralement, pour tous réels $b_p, \ldots, b_n, \lambda$, et μ :

$$\sum_{k=p}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \mu \sum_{k=p}^{n} b_k.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Ces propriétés se retrouvent facilement au brouillon avec des points de suspensions, c'est-à-dire en retrouvant cette démonstration.

Exemple 10. (i) On verra $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \cdot (10+1)}{2} = 55$ d'où le calcul suivant :

$$\sum_{n=1}^{10}(2n+1) \overset{(1)}{=} 2\sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} 1 \overset{(2)}{=} 2\sum_{n=1}^{10} n + (10-1+1) \cdot 1 = 2 \cdot 55 + 10 = 120$$

((1) : par linéarité de la somme, (2) : car la somme de droite est constante). Autrement dit :

$$3 + 5 + 7 + 9 + ... + 21 = 120.$$

(ii) Pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n} n2^{k+1} = n\sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 2^k = 2n\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2n(2^{n+1} - 1).$$

La dernière égalité sera revue bientôt.

Proposition 11. Relation de Chasles. *Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$. Soient $a_p, \ldots, a_n$ des réels. Alors, pour tout $m \in [\![p, n-1]\!]$:*

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Les deux cas suivants de la relation de Chasles sont utilisés très couramment :

(i) Écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$, obtenue en appliquant Chasles à l'indice "$m = n$" dans la somme de gauche. Cette relation est utilisée par exemple pour prouver des résultats par récurrence.

(ii) Écrire, pour n et p entiers tels que $0 \leq p < n$, $\sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{p} a_k$. Cela permet de se ramener à des calculs de sommes qui commencent au rang voulu, 0 ici.

Exemple 12. On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Calculer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{2n} k = n + (n+1) + \ldots + 2n$.

c) Applications : des première sommes à connaitre

Proposition 13.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Voir la preuve par récurrence du chapitre 1. □

Remarque. L'argument de Gauss, à noter.

Remarque. En particulier, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier pour tout entier n. On le retrouve ainsi : n est pair ou $n+1$ est pair, donc 2 divise n ou $n+1$, donc cette fraction est entière.

Remarque. Et si la somme commence à 1? Il faut se rendre compte que

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + k = 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

donc $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut aussi dire, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$$

car le terme "pour $k = 0$" est 0.

Exercice 14. En déduire le calcul de $\sum_{k=0}^{n} (3k+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 15.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. À noter. □

Exercice 16. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Changements d'indice et sommes télescopiques

a) Changement d'indice par décalage

Idée. On peut changer l'énumération des termes d'une somme sans changer cette somme. Cet énoncé est un simple jeu de réécriture.

Exemple 17. Remarquons :

$$\sum_{k=2}^{9} k = \sum_{k=1}^{8}(k+1) = \sum_{k=3}^{10}(k-1) = 2+3+\ldots+8+9.$$

Cela vient-il d'un phénomène plus général ?

Proposition 18. *Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$. Soient $a_p, \ldots, a_n$ des réels. Alors, pour tout $l \in \mathbb{Z}$:*

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p+l}^{n+l} a_{j-l}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Quand on utilise cette proposition "de gauche à droite", on dit qu'on effectue le changement d'indice donné par $j = k + l$. Il est d'usage de donner un "nouveau nom" pour la variable locale de la nouvelle somme (j ici au lieu de k) - et je vous le conseille, c'est nettement plus clair pour vous et vous permet de justifier - mais ce n'est pas rigoureusement obligatoire (exemple précédent).

Exemple 19. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $j = k - 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{j=1-1}^{n-1} 2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} 2 \cdot 2^j = 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2(2^n - 1).$$

On a écrit :

$$2^1+2^2+\ldots+2^n = 2^{0+1}+2^{1+1}+\ldots+2^{(n-1)+1} = 2\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+2\cdot 2^{n-1} = 2(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1}) = 2(2^n-1).$$

Encore une fois, la dernière égalité sera vue plus tard.

Méthode : pour utiliser cette proposition, afin de transformer la somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$, on doit d'abord choisir l'entier l par lequel on va décaler les indices. Ensuite :

- On déclare *poser le changement d'indice* $j = k + l$:
  Effectuons le changement d'indice $j = k + l$ dans la somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$.
- On prépare les nouvelles bornes en justifiant :
  $$k \in [\![p, n]\!] \iff j = k + l \in [\![p + l, n + l]\!].$$
- On écrit $k = j - l$ pour modifier les a_k en a_{j-l} et on conclut :
  $$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p+l}^{n+l} a_{j-l}.$$

Bien sûr, on peut choisir d'autres noms pour les indices de sommations, tant qu'ils ne sont pas déjà fixés.

Exemple 20. Calculons $\sum_{k=4}^{n}(k-4)$ à l'aide d'un changement d'indice.

b) Sommes télescopiques

Idée. L'idée est assez simple et doit être retenue, pour que vous puissiez vérifier que vous ne faites pas de fautes lors de l'application de cette formule. Elle consiste à effectuer des simplifications de la forme suivante :

$$(1-2)+(2-3)+(2-4)+\ldots+(n-(n+1))=1-(n+1).$$

Proposition 21. *Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$, et $a_p, \ldots, a_{n+1}$ des réels. Alors :*

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_p$$

Remarque. Dans l'autre sens, on a donc aussi (en multipliant par -1) :

$$\sum_{k=p}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_p-a_{n+1}$$

Démonstration. À noter : 2 versions. □

Exemple 22. Calculer $\sum_{k=1}^{n} 2^k-2^{k+1}$ pour tout entier n.

Exemple 23. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k+1}{k})$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 24. Démontrer l'existence de réels a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}.$$

En déduire le calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

c) Changement d'indice "avec retournement"

Idée. En plus de faire un changement d'indice au sens précédent, on peut "inverser l'ordre de sommation", et écrire par exemple :

$$a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0.$$

On peut ajouter à cela un décalage d'indice.

Proposition 25. *Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$ et $a_p, \ldots, a_n$ des réels. Alors, pour tout entier l :*

$$\sum_{k=p}^{n} a_k=\sum_{j=l-n}^{l-p} a_{l-j}.$$

Remarque. Pour utiliser cette formule de gauche à droite, on dit qu'on pose $j=l-k$. l est un entier fixé, k et "l'ancienne" variable de sommation, j la "nouvelle".

Démonstration. À noter. □

Méthode : pour utiliser cette proposition, afin de transformer la somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$, on doit d'abord choisir l'entier l par lequel on va décaler les indices. Ensuite, mêmes étapes mais avec une subtilité en plus :

- On déclare *poser le changement d'indice $j = l - k$:*
  Effectuons le changement d'indice $j = l - k$ dans la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$.
- On modifie les bornes en justifiant :
  $$k \in [\![p, n]\!] \iff p \leq k \leq n \iff -p \geq -k \geq -n \iff l - n \leq j \leq l - p \iff j \in [\![l - n, l - p]\!].$$
  Il est inutile de réécrire ces justifications à chaque fois, mais on le fera au brouillon sans oublier de renverser les bornes pour les mettre dans le bon sens.
- On écrit $k = l - j$ pour modifier les a_k en a_{l-j} et on conclut :
  $$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=l-n}^{l-p} a_{l-j}.$$

Bien sûr, on peut choisir d'autres noms pour les indices de sommations, tant qu'ils ne sont pas déjà fixés.

Exemple 26. Calculons $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} (13 - k)^2$.

Exercice 27. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$. *Cherchez avec les points de suspension, mais rédigez avec le symbole $\sum$.*

4. Sommes géométriques

Les sommes de la forme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$, pour q réel, sont appelées *sommes géométriques*. Le réel q est appelé la raison de la somme géométrique $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$.

Idée : Soit q un réel et n un entier naturel, on pose $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Pour calculer S on écrit :

$$(1 - q)S = (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

Puis, on doit faire attention à $q \neq 1$ pour diviser l'égalité par $1 - q$.

Enfin, pour $p \leq n$:

$$q^p + q^{p+1} + \ldots + q^n = q^p(1 + q + \ldots + q^{n-p})$$

permet de calculer les sommes géométriques en général.

Proposition 28. *Soit n un entier naturel et q un réel.*

(i) Supposons $q \neq 1$. Alors :
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- *Pour tout entier $p \leq n$:* $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

(ii) Si $q = 1$, alors:
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$, *et*
- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = (n - p + 1)$.

Remarque. Le mieux, pour se souvenir de ces égalités, est de s'approprier le raisonnement présenté avant la proposition. Mais on peut aussi retenir le moyen mnémotechnique suivant :
Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = (\text{Premier Terme})\frac{1-(\text{Raison})^{(\text{Nombre de termes})}}{1-(\text{Raison})}$.
Si $q = 1$, la somme est constante donc triviale à calculer.

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 29. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ pour tout entier naturel n.

Exemple 30. Calculons $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{7^k}{2^{k+1}}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 31. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2\cdot 3^{k-1}}{3\cdot 2^{k+1}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Somme sur un ensemble et autres notations

On peut utiliser des ensembles finis pour décrire des sommes. Par exemple, si on pose

$$u_n = 2^n + n$$

pour tout entier n, alors on pose:

$$\sum_{k\in\{2,5,6\}} u_k = u_2 + u_5 + u_6 = (2^2+2) + (2^5+5) + (2^6+6) = \dots$$

Par contre, il faut faire attention avec les répétitions dans les descriptions des ensembles finis. Par exemple,

$$\{2,2,3,5\} = \{2,3,5\}$$

donc on doit avoir

$$\sum_{i\in\{2,2,3,5\}} u_i = u_2 + u_5 + u_6.$$

Définition 32. Soit I un ensemble fini et n un entier naturel. On dit que $(i_1,\dots,i_n)$ est une énumération de I sans répétition si $I = \{i_1,\dots,i_n\}$ et si les éléments $i_1,\dots,i_n$ sont deux à deux distincts.

Remarque. Dans le cadre de la proposition ci-dessus, n est le nombre d'éléments de I, appelé *cardinal* de I et noté $\mathrm{Card}(I)$.

Définition 33. (Somme sur un ensemble.) Soit I un ensemble fini. Supposons donné un réel a_i pour chaque élément $i \in I$. Alors, on pose :

$$\sum_{i\in I} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$$

où $(i_1,\dots,i_n)$ est une énumération de I sans répétitions.
Si $I = \emptyset$, on pose (convention):

$$\sum_{i\in I} a_i = 0.$$

Remarque. On peut montrer que cette définition est bien posée : si $(j_1,\dots,j_m)$ est une autre énumération de I sans répétitions, alors $n = m$ et :

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n} = a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_m}.$$

Mais pour le faire, il faut se plonger dans la théorie hors programme des ensembles finis. L'argument final est ici que la somme est commutative : on peut réorganiser les termes d'une somme sans changer cette somme. Par exemple, $\{2,4,5\}=\{5,2,4\}$ et $a_2+a_4+a_5=a_5+a_2+a_4$.

Remarque. Dire que la somme "vide" est nulle est une convention, on a de très bons arguments pour l'adopter.

Exemple 34. $\displaystyle\sum_{k\in\{1,3,5\}} 2^k = 2^1+2^3+2^5=\dots$

Définition 35. (Somme sur un ensemble avec condition.) Soit I un ensemble fini.
Supposons donnés un réel a_i pour chaque $i\in I$ et $(P(i))_{i\in I}$ une propriété à paramètre sur I.
Notons $I_P=\{i\in I|P(i)\}$.
Alors, I_P est un ensemble fini (comme partie de l'ensemble fini I), et on pose :

$$\sum_{\substack{i\in I\\ P(i)}} a_i = \sum_{i\in I_P} a_i.$$

Exemple 36.

$$\sum_{\substack{i\in [\![1,9]\!]\\ i\text{ pair}}} 2^i = \sum_{i\in\{2,4,6,8\}} 2^i = 2^2+2^4+2^6+2^8=\dots$$

Exemple 37. (A noter) On trouve plus couramment la notation suivante, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n} 3^k = 3^0+3^2+\dots+3^{??}.$$

Comment compléter les "??" ?

Remarque. En pratique, vous devez savoir gérer les sommes (et les produits) dont l'indice de sommation est entier, pour lesquels on se restreint éventuellement aux rangs pairs et impairs. On voit que selon la parité du dernier indice, la description "pointilliste" de la somme change...

Vous retiendrez bien les "passages" suivant pour manipuler ces sommes sur les rangs pairs ou impairs, à retrouver à chaque fois (points de suspension).

Proposition 38. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{2k}$$

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1}$$

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{2n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{2k}$$

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{2n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}$$

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n} u_k + \sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Démonstration. À retrouver avec les points de suspension. □

Une version plus générale :

Proposition 39. *Avec les notation ci-dessus :*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k}$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}$$

Démonstration. Par disjonction des cas, selon la parité de n, on retrouve les formules ci-dessus. □

Remarque. Si vous souhaitez éviter de manier une partie entière, procédez par disjonction des cas.

II. Produit de réels

Tout se passe à peu près de la même manière : on utilise le symbole $\prod$ pour définir des produits finis généraux. Les démonstrations se passent comme pour les sommes, et ne seront pas données (elles se retrouvent facilement : c'est un bon exercice pour tester votre compréhension).

1. Définition

Définition 40. Soient n et p des entiers tels que $p \leq n$, et $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ des réels. On pose :

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Ce produit est aussi noté $\displaystyle\prod_{k \in [\![p,n]\!]} a_k$ ou $\displaystyle\prod_{p \leq k \leq n} a_k$.

Exemple 41. Pour tout entier n, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 2^2 2^3 \ldots 2^n = 2^{1+2+\ldots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Remarque. Comme pour les sommes, l'indice utilisé dans un produit est une variable muette.

On calcule facilement les produits constants.

Proposition 42. *Soit a un réel, et n et p deux entiers tels que $p \leq n$. Alors :*

$$\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}.$$

Remarque. La règle du produit nul donne :

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = 0 \iff \exists k \in [\![p,n]\!], a_k = 0.$$

2. Propriétés calculatoires

Dans toute la suite de ce chapitre, p et n sont des entiers tels que $p \leq n$ et $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ sont des réels. *N'oubliez pas de rappeler cela si vous devez restituer ces énoncés...*

Proposition 43. *(i) Soient $b_p, b_{p+1}, \ldots, b_n$ des réels. Alors,*

$$\prod_{k=p}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right).$$

(ii) Soit λ un entier naturel, ou un entier relatif si les a_k sont tous non nuls, ou un réel si tous les a_k sont strictement positifs. Alors,

$$\prod_{k=p}^{n} a_k^{\lambda} = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^{\lambda}.$$

(iii) Pour tout entier $m \in [\![p, n-1]\!]$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k = \left(\prod_{k=p}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right)$.

Remarque. Le point (*iii*) est encore appelé la relation de Chasles.

Exercice 44. Compléter et démontrer : pour tout réel λ :

$$\prod_{k=p}^{n}(\lambda a_k) = \ldots.$$

Remarque. Si les b_k sont tous non nuls, pour $p \leq k \leq n$, alors :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k}{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} b_k}$$

car avec les propriétés précédentes :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \prod_{k=p}^{n} a_k b_k^{-1} = (\prod_{k=p}^{n} a_k)(\prod_{k=p}^{n} b_k^{-1}) = (\prod_{k=p}^{n} a_k)(\prod_{k=p}^{n} b_k)^{-1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k}{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} b_k}.$$

3. Changement d'indices, produits télescopiques

Idée. Comme pour les sommes, on a une notion de produit télescopique. Par exemple, par simplifications successives, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Proposition 45. *Supposons les réels a_k non nuls, pour tout $k \in [\![p, n+1]\!]$. Alors :*

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_p}{a_{n+1}}$$

Remarque. Dans l'autre sens, et toujours avec cette hypothèse de non nullité :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

Remarque. Quand on utilise cette proposition, on dit qu'on "reconnait un produit télescopique".

Exemple 46. Calculons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$.

Pour les changements d'indice :

Proposition 47. *Pour tout entier l :*

(i) (changement d'indice par décalage : $j = k + l$)

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{j=p+l}^{n+l} a_{j-l}.$$

(ii) (changement d'indice avec retournement : $j = l - k$)

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{j=l-n}^{l-p} a_{l-j}.$$

Démonstration. Si vous avez du mal avec cet énoncé, retrouvez la démonstration avec des points de suspension. □

Remarque. Pour appliquer ces changements d'indice, on rédige comme pour les sommes.

Exemple 48. Calculons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1-k}$.

4. Notation généralisées

Les mêmes règles généralisant les description des sommes s'appliquent pour les produits. Par exemple :

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{13} 2^k = 2^2 2^4 2^6 2^8 2^{10} 2^{12}.$$

De plus, on pose $\prod_{k\in\emptyset} a_k = 1$ indépendamment des a_k : le produit "vide" est 1, par convention.

III. Propriétés additionnelles des sommes et des produits

1. Factorielle d'un entier

Définition 49. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle factorielle de n l'entier noté $n!$ donné par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

De plus, on pose $0! = 1$.

Voici un exercice des plus classique.

Exercice 50. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose considère le produit P des nombres pairs de 1 à $2n$, et le produit I des nombres impairs de 1 à $2n$.

(i) Exprimer P en fonction de $n!$.

(ii) En déduire une expression de I utilisant la notion de factorielle.

2. logarithme et exponentielle

On peut généraliser les identités dites "de morphisme" du logarithme et de l'exponentielle :

$$e^{a+b} = e^a e^b \text{ et } \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

pour tous réels a et b convenables.

Proposition 51. *(i) Supposons les réels $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ tous strictement positifs. Alors :*

$$\sum_{k=p}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right).$$

(ii) Pour tous réels $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$:

$$\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} e^{a_k}.$$

Démonstration. Par récurrence sur l'entier n. □

Corollaire :

Proposition 52. *Soit x un réel strictement positif. Alors :*

$$\prod_{k=p}^{n} x^{a_k} = x^{\sum_{k=p}^{n} a_k}.$$

Exemple 53. Calculons $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

3. Avec les inégalités

On peut sommer des inégalités.

Proposition 54. *Soient $b_p, \ldots, b_n$ des réels. Supposons :*

$$\forall k \in [\![p, n]\!], a_k \leq b_k.$$

Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k \leq \sum_{k=p}^{n} b_k.$$

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Remarque. Cette proposition est aussi vraie avec des inégalités strictes.

Remarque. Il suffit en fait qu'une seule inégalité soit stricte dans l'hypothèse...

Et on peut multiplier des inégalités **à termes tous positifs**.

Proposition 55. *Soient $b_p, \ldots, b_n$ des réels. Supposons :*

$$\forall k \in [\![p, n]\!], 0 \leq a_k \leq b_k.$$

En particulier, tous les réels a_k et b_k sont positifs (pour $p \leq k \leq n$). Alors :

$$\prod_{k=p}^{n} a_k \leq \prod_{k=p}^{n} b_k.$$

4. Avec la valeur absolue

Encore une fois, une démonstration par récurrence à partir des propriétés :

$$|ab| = |a| \cdot |b| \text{ et } |a+b| \leq |a| + |b|$$

permet de montrer :

Proposition 56. *(i)* $|\prod_{k=p}^{n} a_k| = \prod_{k=p}^{n} |a_k|$.

(ii) $|\sum_{k=p}^{n} a_k| \leq \sum_{k=p}^{n} |a_k|$.

Démonstration. Par récurrence à partir des propriétés de la valeur absolue (à noter). □

5. Doubles sommes

On peut être confronté à des doubles sommes, par exemple. Vous pouvez déjà les appréhender avec ce cours.

Exercice 57. Calculons pour n entier : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)$.

6. Développement généralisé

Merci de ne pas écrire l'égalité **très fausse en général** :

$$(\sum_{k=p}^{n} a_k)(\sum_{k=p}^{n} b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k b_k.$$

Écrivez ça explicitement pour des sommes à 3 termes afin de vous en convaincre.
Si vous devez **développer** un produit de somme, ce qui devrait être rare, vous pouvez utiliser la :

Proposition 58. *Soient p' et n' des entiers tels que $p' \leq n'$ et $b_{p'}, \ldots, b_{n'}$ des réels. Alors :*

$$\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=p'}^{n'} b_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \sum_{l=p'}^{n'} a_k b_l.$$

Démonstration. Soient n, p, n' et p' des entiers tels que $n \leq p$ et $n' \leq p'$. Soient $a_p, ..., a_n, b_{p'}, ..., b_{n'}$

des réels.

$$
\begin{aligned}
(\sum_{k=p}^{n} a_k)(\sum_{k=p'}^{n'} b_k) &= (\sum_{k=p}^{n} a_k)(\sum_{l=p'}^{n'} b_l) \\
&= \left(\sum_{k=p}^{n} a_k(\sum_{l=p'}^{n'} b_l)\right) && \text{(par linéarité)} \\
&= \left(\sum_{k=p}^{n}\sum_{l=p'}^{n'} a_k b_l\right) && \text{(par linéarité)}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat voulu. $\square$

IV. Annexe : doubles sommes, exercice corrigé

Sommes doubles

Considérons les sommes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} 3^i 2^j \right)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 3^i 2^j \right)$$

On pose, pour tout entier i et j de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 3^i 2^j$.
Alors, S_1 et S_2 sont toutes les deux la somme de tous les réels $a_{i,j}$ pour tous les entiers i et j de $[\![1, n]\!]$ (*écrivez ces sommes avec deux niveaux de points de suspension*).
Elles sont donc bien égales, et on peut changer l'ordre dans lequel on somme (d'abord sur i, ou d'abord sur j).
On dit qu'on peut permuter les symboles sommes.
Voici les notations utilisées pour ce genre de sommes (les parenthèses sont inutiles) et la propriété de permutation :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j}$$

Ces notations, et la propriété de permutation, sont bien-sûr valables pour tous réels $a_{i,j}$.
Considérons maintenant les sommes :

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} ij \right)$$

$$S_4 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} ij \right)$$

On pose, pour tous entiers naturel i et j, $a_{i,j} = ij$.
Alors, S_3 et S_4 sont toutes les deux la somme des réels $a_{i,j}$ pour tous les entiers i et j de $[\![1, n]\!]$ tels que $j \leq i$. Encore une fois, on peut permuter les symboles sommes, mais c'est ici plus subtil.
Voici les notations utilisées et la propriété de permutation pour ce genre de sommes :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ j \leq i}} a_{i,j}$$

Ces notations, et la propriété de permutation, sont bien-sûr valables pour tous réels $a_{i,j}$. Les sommes de cette forme là (avec, comme contrainte, $i \leq j$ ou $i < j$) sont dites «triangulaires».

1. Exercices

Dans ces exercices, $n \geq 1$ est un entier naturel fixé.

1. Soient $i \in [\![1, n]\!]$. Calculer, en fonction de i :

   (a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$. (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 3^i 2^j$. (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} ij$.

   ((a) : on pensera à la relation de Chasles)

2. En déduire :

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\right)$, (b) $\displaystyle S_1=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}3^i2^j\right)$ (c) $\displaystyle S_3=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}ij\right)$.

Indication : On pourra utiliser librement ce résultat : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. Calculer $\displaystyle S_2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}3^i2^j\right)$. Avez-vous bien $S_1=S_2$?

4. Calculer $\displaystyle S_4=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}ij\right)$. Avez-vous bien $S_3=S_4$?

5. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2$

6. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{j}$. *Pour trouver la réponse, on essayera de sommer dans les deux sens jusqu'à trouver un sens qui marche.*

2. Correction

1. (a) Soit $i\in[\![1,n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)&=\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j) \qquad \text{d'après la relation de Chasles}\\&=\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\\&=\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)\end{aligned}$$

De plus, la formule trouvée reste valable si $i=n$, car on a alors : $\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\sum_{j=1}^{n}j$ et $n-i=0$.

Finalement, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\frac{2n+1}{2}i-\frac{i^2}{2}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}3^i2^j=3^i\sum_{j=1}^{n}2^j=3^i\times2\frac{2^n-1}{2-1}=3^i(2^{n+1}-2)$.

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{i}ij=i\sum_{j=1}^{i}j=i\frac{i(i+1)}{2}=\frac{i^2(i+1)}{2}$.

2. On peut maintenant calculer les sommes doubles données.

(a) D'après la question $1(a)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2n+1}{2}i-\frac{i^2}{2}\\
&= \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= n(n+1)(2n+1)(\frac{1}{4}-\frac{1}{12})\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On remarque l'identité suivante : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}i^2$, qui donne une indication pour une autre démonstration plus géométrique de calcul de cette double somme.

(b) D'après la question $1(b)$:

$$\begin{aligned}
S_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}3^i2^j &= \sum_{i=1}^{n}3^i(2^{n+1}-2)\\
&= (2^{n+1}-2)\sum_{i=1}^{n}3^i\\
&= (2^{n+1}-2)\times 3\frac{3^n-1}{3-1})\\
&= (2^n-1)(3^{n+1}-3)
\end{aligned}$$

(c) On utilise maintenant la question $1(c)$:

$$\begin{aligned}
S_3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}ij &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2(i+1)}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{2}+\frac{i^2}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^3+\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{12}(3n(n+1)+2(2n+1))\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+7n+2)\right)\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}
\end{aligned}$$

Pour la dernière factorisation, calculer le discriminant ou remarquer que -2 est racine de $3X^2+7X+2$.

3. Pour S_2, on peut mener le calcul avec la même méthode que pour S_1, ou bien remarquer la chose

suivante :

$$\begin{aligned}
S_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 2^j 3^i\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(2^j \sum_{i=1}^{n} 3^i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \left(\sum_{i=1}^{n} 3^i\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} 3^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{n} 3^i$ est une constante, et de même :

$$\begin{aligned}
S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j 3^i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(3^i \sum_{j=1}^{n} 2^j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 3^i \left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} 3^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right)\\
&= S_2
\end{aligned}$$

ce qui donne $S_1 = S_2$.

En fait, c'est de la distributivité.

4. Cette fois-ci, c'est plus compliqué, car l'indice j est présent dans la seconde somme, comme borne. On fait donc le calcul :

$$\begin{aligned}
S_4 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} ij &= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n} i\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{j-1} i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(j-1)j}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 (1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= S_3 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}
\end{aligned}$$

d'après l'égalité $\star$ obtenue à la question $2(c)$.

5. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2+2ij+j^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)+2i\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right)\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}i^2\times n\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}2i\frac{n(n+1)}{2}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\times 2\times\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}\\
&= \frac{n^2(n+1)}{6}(2(2n+1)+3(n+1))\\
&= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}
\end{aligned}$$

6. Le calcul se passe bien dans un sens seulement :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(j-1+1)\frac{1}{j} && \text{(car la somme est constante)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}1\\
&= n
\end{aligned}$$