TD de mathématiques n°5 : Polynômes

Pour commencer

Second degré

Exercice 1 Mettre sous forme canonique les trinômes suivants, puis dresser leurs tableaux de variations :

(a) $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ (b) $x \mapsto x^2 - 4$ (c) $x \mapsto -3x^2 + 6x + 8$ (d) $x \mapsto 2(x-2)(4-x)$

Exercice 2 Déterminer les racines et les tableaux de signe de chacun des trinômes suivants :

(a) $x \mapsto x^2 - 4$ (b) $x \mapsto -x^2 + 5x - 6$ (c) $x \mapsto x^2 + x - 1$ (d) $x \mapsto (3-2x)(x-5)$

Exercice 3 Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
(b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
(c) $x^4 + 2x^2 - 3 \leq 0$
(d) $x^4 - 4x^2 + 3 \leq 0$
(e) $x^4 - x^2 - 2 = 0$
(f) $e^x + e^{-x} = 4$
(g) $x^4 - x^2 - 2 > 0$
(h) $e^x + e^{-x} \leq 4$
(i) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
(j) $e^x - e^{-x} = 2$
(k) $3x^4 + 5x^2 - 2 \geq 0$
(l) $e^x - e^{-x} > 2$

Identification des coefficients

Exercice 4 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $a(X+1) + b(X-1) + c\left(X^2 - 1\right) = X^2$.

(b) $a\left(X^2 + X\right) + b\left(X^2 - X\right) + c\left(X^2 + 1\right) = 2\left(X^2 - 1\right)$

Exercice 5 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $\frac{1}{X^2+X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$.

(b) $\frac{1}{X^2-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$.

(c) $\frac{4X-2}{X(X^2-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$.

(d) $\frac{2}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$

Exercice 6 En utilisant les résultats de l'exercice précédent, calculer les valeurs des sommes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{4k-2}{k\left(k^2-1\right)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 7 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(1) = P(-1) = 1$ et $P'(1) = 0$ et $P'(-1) = -4$.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'(X) - XP(X) = X^2 - 1$.

Exercice 9

(a) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = XP'(X)$.

(b) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $2P(X) = XP'(X)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $nP(X) = XP'(X)$.

Division euclidienne

Exercice 10 Réaliser la division euclidienne de :

(a) $3X^3 - X^2 + X + 1$ par $X - 1$

(b) $X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 2X + 1$ par $X^2 - 4X - 3$

(c) $X^4 + X^3 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$

(d) $X^3 - 2X + 1$ par $X - 1$

(e) $2X^5 - X^3$ par $X^3 + 1$

(f) $X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$ par $X^2 - 3X + 2$

(g) $X^3 + 3X - 4$ par $X - 1$

(h) $X^4 + 1$ par $X^2 - \sqrt{2}X + 1$

(i) $2X^3 + 7X^2 - 2X - 3$ par $2X^2 - X + 1$

(j) $X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$

Exercice 11 On pose $P(X) = X^2$.

(a) Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X + 1$.

(b) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

Exercice 12 Pour quelle(s) valeur(s) $a, b \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^2 - 3X + 2$ divise-t-il le polynôme $aX^3 + bX + 1$?

Racines et factorisation

Exercice 13 Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$. Puis, Résoudre l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 Factoriser le plus possible les polynômes :

(a) $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$

(b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$

(c) $X^3 - 4X^2 - 7X + 10$

(d) $2X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 7X - 3$

Exercice 15 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 - b^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

(a) Déterminer une racine évidente de P, puis factoriser P le plus possible.

(b) En déduire l'identité remarquable: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

(c) En déduire l'identité remarquable : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

(d) Factoriser le plus possible le polynôme $Q(X) = X^6 - 1$.

Exercice 16 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^2 - 3X + 2$ divise le polynôme $(X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 1$.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer toutes les éventuelles racines du polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} X^k$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n} |P(k) - Q(k)| = 0$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 19

(a) Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas une fonction polynomiale.

(b) Montrer que la fonction exponentielle n'est pas une fonction polynomiale.

(c) Montrer que la fonction partie entière n'est pas une fonction polynomiale.

Exercice 20 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x + 1) = P(x)$.

Exercice 21 *Utile pour la suite* Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Notons R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

(a) Montrer que P admet deux racines distinctes α et β.

(b) Déterminer $R_n(\alpha)$ et $R_n(\beta)$.

(c) En déduire une expression de $R_n(X)$.

Pour continuer

Exercice 22 Déterminer toutes les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.

Exercice 23 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $aX(X-1) + bX(X+1) + c = X + 1$

(b) $aX(X-1)(X-2) + bX(X+1)(X+2) + c\left(X^2 - 1\right) = 4X^2 + 2$

(c) $aX(1-X)(1+X) + b(1-X)(1+X) + cX = 2X^3 + X^2 + X - 1$

Exercice 24 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $\frac{2X^2-4X+5}{(X+4)^3} = \frac{a}{(X+4)^3} + \frac{b}{(X+4)^2} + \frac{c}{X+4}$.

(b) $\frac{X^2+1}{X-2} = aX + b + \frac{c}{X-2}$.

Exercice 25 Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 1$ et $P'(1) = 1$.

Exercice 26 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $4P(X) = XP'(X) + P''(X)$.

Exercice 27 Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = -X^3 - 3X^2 + 6X + 8$. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 28 Factoriser le plus possible les polynômes :

(a) $X^3 - X^2 - 3X + 3$

(b) $X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$

(c) $X^3 - X^2 - 3X - 1$

(d) $X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 8$

Exercice 29 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 - a^2X + 2X + a^2$.

(a) Factoriser le polynôme P le plus possible.

(b) Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 30 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (P(k))^2 = 0$. Montrer que $P = 0$.