

Programme de colle n° 1 : Équations, Logique et raisonnements.

Semaine du lundi 18 septembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Les démonstrations plus avancées (absurde, disjonction des cas, analyse synthèse et récurrence) ont déjà été illustrées, mais le TD portant spécifiquement sur ces thèmes aura lieu mardi de cette semaine. On sera donc moins exigeant avec les élèves passant lundi.

Résolution d'équations et inéquations

1.1 Recherche du domaine, puis résolution d'une équation ou inéquation. Travail avec une chaîne d'équivalence. Utilisation du caractère strictement monotone (sur un intervalle) d'une fonction dans ce contexte.

1.2 Simplifications avec fractions, puissances, et fonctions usuelles.

Le cours sur la monotonie sera fait cette semaine, donc pas de questions liées à des subtilités sur cette notion.

Élèves : vous pouvez revoir toutes ces règles de simplifications sur le site de mon prédécesseur : <https://ecg1a-2021-2022.web.app/prerequis.html>

Logique et raisonnement

1.3 Ensembles usuels : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Appartenance et inclusion. Quantificateurs.

1.4 Propositions, propositions à paramètres et quantificateurs. Définition d'un ensemble en extension ou en compréhension. Intervalles réels.

1.5 Connecteurs logiques ("et", "ou", "non" ou $\neg$, $\implies$, $\iff$) et table de vérité. Réunion, intersection d'ensembles, complémentaire (version $B \setminus A$), lien avec les connecteurs logiques pour des ensembles définis en compréhension.

1.6 Caractérisation de l'implication avec les connecteurs logiques "ou" et "non", distributivité. Négation d'une proposition. Lois de De Morgan. Négation d'une implication, d'une équivalence. Négation d'un énoncé quantifié.

1.7 Premiers schémas de démonstration : démonstration d'une implication, utilisation de la contraposée. Démonstration d'une équivalence. Principe du *Modus Ponens*. Considérations nécessaires à la démonstration d'un énoncé quantifié. Utilisation d'un contre exemple.

1.8 Raisonnements par l'absurde. Disjonction des cas. Démonstration d'un énoncé de la forme "A ou B". Raisonnement par analyse synthèse.

1.9 Démonstration par récurrence.

La théorie des ensembles n'est pas l'objet de ce chapitre, seuls les premiers rudiments liés à l'écriture mathématique sont expliqués.

Aucun exercice ne consistant à établir une table de vérité n'a été traité en TD, mais on pourra tester la compréhension de ce point sur des exemples simples.

Le cours sur la récurrence sera complété lundi (plus d'exemples, initialisation quelconque, récurrence double et forte).

Quelques questions de cours

- Résoudre l'inéquation $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 1$ d'inconnue réelle x .
- Donner la table de vérité de l'implication. Donner la contraposée, la réciproque et la négation de l'implication suivante... (au choix de l'interrogateur).
- Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > x, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$.
- Démontrer que pour tout entier n , n est pair si et seulement si n^2 est pair.
- Démontrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$.
- Démontrer, pour tout réel x , l'équivalence : $(\forall y > 0, x \leq y) \iff x \leq 0$. On utilisera un raisonnement par l'absurde.
- Soit $y \in]0, 1[$. Démontrer $\exists! x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{1 + e^x}$.
- Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On pourra utiliser le symbole $\sum$.