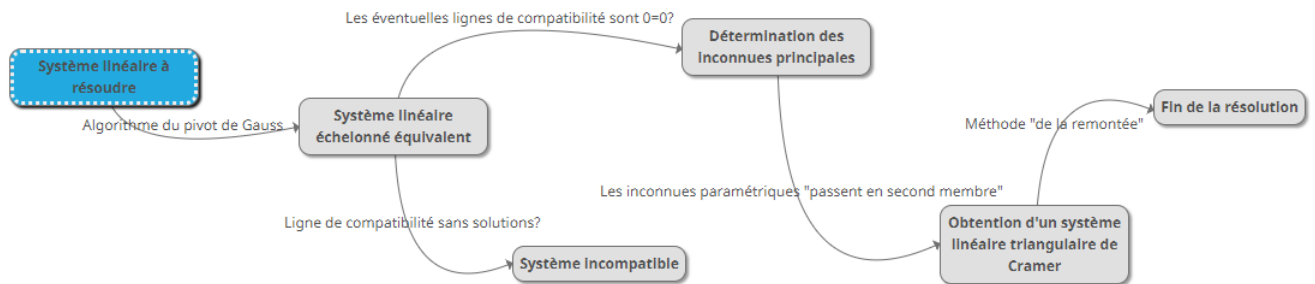


# Chapitre 6 : Systèmes linéaires

ECG1 A, Lycée Hoche



## I. Généralités sur les systèmes linéaires

**Remarque.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $n$ -uplet de réels la donnée ordonnée de  $n$  réels  $x_1, \dots, x_n$ . Un tel  $n$ -uplet sera noté  $(x_1, \dots, x_n)$ . Autrement dit, si  $y_1, \dots, y_n$  sont d'autres réels :

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = y_i.$$

L'ensemble des  $n$ -uplets de réels est noté  $\mathbb{R}^n$ .

On dit que les réels  $x_1, \dots, x_n$  sont les coordonnées du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$ , et  $x_i$  est appelé la  $i$ -ième coordonnée de ce  $n$ -uplet (pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ).

Le  $n$ -uplet  $(0, 0, \dots, 0)$  est appelé le  $n$ -uplet nul.

Par exemple,  $\mathbb{R}^1$  s'assimile naturellement à  $\mathbb{R}$ , tandis qu'en géométrie, la notion de coordonnée cartésienne permet d'assimiler le plan et l'espace à, respectivement,  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ . Les éléments de  $\mathbb{R}^2$  sont appelés les couples de réels, et les éléments de  $\mathbb{R}^3$  sont les triplets de réels.

Bien que nous n'insisterons pas sur ce point, tout ce que nous verrons dans ce chapitre peut être pensé en terme de géométrie, et  $\mathbb{R}^n$  représente alors un espace à  $n$  dimensions. Ces espaces à  $n$  dimensions ne sont pas des curiosités de mathématiciens ou de physiciens, ils sont indispensables dès qu'on utilise les mathématiques un peu sérieusement.

### 1. Équations linéaires

**Définition 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle équation linéaire à  $n$  inconnues  $x_1, \dots, x_n$  toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $b$  sont des réels donnés.

Par exemple,  $2x + y - 3z = 4$  est une équation linéaire à 3 inconnues :  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Par contre,  $x^2 + y^2 = 1$  ou  $e^x + y = 0$ , ou  $2x + 3y + xy = 4$  ne sont pas, à priori, des équation linéaire.

**Définition 2.** Soient  $a_1, \dots, a_n$  et  $b$  des réels. Considérons l'équation linéaire  $(L)$  :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

- (i) On dit que  $a_i$  est le *coefficient* de l'inconnue  $x_i$  (pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) et que  $b$  est le second membre de  $(L)$ .
- (ii) Si le second membre  $b$  de  $(L)$  est nul, on dit que l'équation linéaire  $(L)$  est *homogène*.
- (iii) On dit qu'un  $n$ -uplet de réels  $(x_1, \dots, x_n)$  est *solution* de  $(L)$  si l'égalité

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

est vraie.

- (iv) *Résoudre* une équation linéaire, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

**Remarque.** Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels. Considérons l'équation linéaire homogène  $(L) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ . Alors, le  $n$ -uplet nul  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  est solution de  $(L)$ , car  $a_1 \times 0 + \dots + a_n \times 0 = 0 + \dots + 0 = 0$ .

Ainsi, toute équation linéaire **homogène** admet au moins une solution : le  $n$ -uplet nul, où  $n$  est le nombre de ses inconnues.

**Exemple 3.** L'équation linéaire à une inconnue  $2x = 3$  admet  $x = \frac{3}{2}$  comme unique solution. Son ensemble de solutions est  $\{\frac{3}{2}\}$ .

**Exemple 4.** Considérons l'équation linéaire  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ . Alors, un triplet  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  est solution de cette équation si et seulement si  $x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3$ , sans contrainte supplémentaire sur  $x_2$  et  $x_3$ .

Donc on peut décrire l'ensemble de ses solutions comme l'ensemble :

$$\{(4 - 2x_2 - 3x_3, x_2, x_3) \mid x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, on dit que ses solutions sont tous les triplets de la forme  $(4 - 2x_2 - 3x_3, x_2, x_3)$ , où  $x_2$  et  $x_3$  sont des *paramètres* réels. Cette équation admet une infinité de solutions.

**Exercice 5.** Déterminer l'ensemble des solutions de  $2x + y - 3z = 2$ . Puis, donner une de ses solutions.

## 2. Systèmes linéaires

**Définition 6.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle système d'équations linéaires à  $p$  équations et  $n$  inconnues la donnée de  $p$  équations linéaires à  $n$  inconnues  $x_1, \dots, x_n$  :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n & = b_1 (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n & = b_2 (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n & = b_p (L_p) \end{cases}$$

Ainsi, les réels  $a_{i,j}$  et  $b_i$  sont donnés (pour tous  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ).

Les équations linéaires  $(L_1), \dots, (L_p)$  sont appelés les lignes de ce système linéaire.

Les réels  $b_1, \dots, b_p$  sont appelés les seconds membres de ce système linéaire, et on dit que  $a_{i,j}$  est le coefficient en ligne  $i$  de l'inconnue  $x_j$ .

**Remarque. Attention :** Il faut s'habituer à la convention suivante, que vous retrouverez. Lorsqu'on considère un système général comme ci-dessus, les coefficients se voient attribuer un double indice. Retenez l'ordre **ligne puis colonne** :  $a_{i,j}$  est le coefficient en  $i$ -ième ligne, et de la  $j$ -ième inconnue. Comme on écrira toujours les inconnues dans un ordre fixe, on peut penser à  $j$  comme à un numéro de colonne.

**Remarque.** Pour un système linéaire comme ci-dessus, on dit aussi que le  $p$ -uplet  $(b_1, \dots, b_p)$  est le **second membre** du système.

**Remarque.** En général, le contexte est clair, et on ne précise pas les inconnues du système. De même, on se contente simplement de parler de systèmes linéaires.

**Exemple 7.**  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  est un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues :  $x$  et  $y$ .

**Définition 8.** Soit  $(S)$  un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues. Notons  $(L_1), \dots, (L_p)$  ses lignes. On dit qu'un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  est solution de  $(S)$  s'il est solution de chaque équation  $(L_1), \dots, (L_p)$ .  
Résoudre un système linéaire, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

**Exemple 9.** Le couple  $(-\frac{1}{2}, 2)$  est solution du système  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ , car  $\begin{cases} 2 \times (-\frac{1}{2}) + 2 = 1 \\ 2 = 2 \end{cases}$ . C'est même la seule solution de ce système. En effet, si  $(x, y)$  est solution, alors  $y = 2$  d'après la seconde équation, et la première équation donne alors  $2x + 2 = 1$ , donc  $x = -\frac{1}{2}$ .

**Exemple 10.**  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$  n'a pas de solutions. En effet, par l'absurde, s'il admettait une telle solution  $(x, y, z)$ , alors on aurait  $x + y = 2$  et  $x + y = -2$ , donc  $2 = -2$ , ce qui est une contradiction.

**Exemple 11.**  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$  n'admet pas de solutions, car la dernière ligne n'a aucune solution.

**Exemple 12.** Le triplet  $(x, y, z)$  est solution de  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$  si et seulement si  $x = \frac{1-y}{2}$  et  $z = 2$ .  
Donc l'ensemble des solutions de ce système linéaire est

$$\left\{ \left( \frac{1-y}{2}, y, 2 \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Remarque.** Dans la suite, il arrive d'employer simplement le mot «système» pour désigner un système linéaire (mais on ne parle que de systèmes linéaires dans ce cours).

### 3. Vocabulaire

**Remarque.** À partir de maintenant et pour toute la suite du chapitre,  $n$  et  $p$  sont des entiers naturels non nuls.

#### a) Autour de solutions d'un système linéaire

**Définition 13.** Un système linéaire est dit incompatible s'il n'admet pas de solutions. Il est dit compatible sinon.

**Exemple 14.** Les systèmes comme  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$  ayant une équation «sans inconnues» et un second membre correspondant non nul sont incompatibles (car l'égalité  $0 = 2$  n'est vraie "pour aucuns réels  $x$  et  $y$ ").

En fait, le pivot de Gauss nous mènera toujours à un système de ce type dans le cas où notre système est incompatible.

**Définition 15.** Deux systèmes linéaires  $(S)$  et  $(S')$  sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions. Dans ce cas, on note  $(S) \iff (S')$ .

**Exemple 16.**  $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$  et  $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$  sont équivalents, car un couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est solution du premier système si et seulement si il est solution de ses deux premières lignes.

Voici un théorème dont nous ne verrons pas la démonstration pour l'instant (voir en fin de chapitre).

**Théorème 17.** *Tout système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions.*

**b) Systèmes homogènes**

**Définition 18.** Un système linéaire à  $p$  équations, de second membre  $(b_1, b_2, \dots, b_p)$  est dit homogène si  $b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$ .

**Exemple 19.**  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$  est un système linéaire homogène, d'inconnues  $x, y, z$ .

**Remarque.** Les systèmes linéaires homogènes auront un rôle particulier dans la théorie (voir dernière partie). Une première chose importante :

**Proposition 20.** *Soit  $(S)$  un système linéaire homogène à  $n$  inconnues. Alors, le  $n$ -uplet nul  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  est solution de  $(S)$ .*

**Démonstration.** En effet, si on note  $(L_i)$  la  $i$ -ème ligne de  $(S)$  (pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ), alors  $(L_i)$  étant homogène, le  $n$ -uplet nul est solution de  $(L_i)$ . Ceci étant vrai pour tout  $i$ , le  $n$ -uplet nul est bien solution de  $(S)$ .  $\square$

**Remarque.** Le  $n$ -uplet nul  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  est noté  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

**c) Systèmes carrés, systèmes de Cramer**

**Définition 21.** On dit qu'un système linéaire à  $p$  équations et  $n$  inconnues est :

- (i) carré si  $n = p$ ,
- (ii) surdéterminé si  $p > n$ ,
- (iii) sous-déterminé si  $p < n$ .

**Exemple 22.**  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$  et  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$  sont des systèmes carrés,  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$  est surdéterminé et  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$  est sous-déterminé.

**Remarque.** Sur-déterminé car il y a plus d'équations que d'inconnues. Sous-déterminé, car il y a plus d'inconnues que d'équations. La raison à cela est une morale simple, qu'on peut rendre précise avec plus d'algèbre linéaire : les systèmes avec une unique solution *devraient* avoir autant d'équations que d'inconnues. Les énoncés rendant cela précis seront vus dans le chapitre sur les matrices.

Les systèmes carrés ayant une unique solution sont particulièrement importants, et se voient donc attribuer un nom. Vous les verrez apparaître dans des chapitres ultérieurs, aussi bien en première année qu'en deuxième année.

**Définition 23.** On dit qu'un système carré est *de Cramer* s'il admet une unique solution.

**Exemple 24.**  $(S) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -2 \\ z = 2 \end{cases}$  est un système de Cramer. En effet, si  $(x, y, z)$  est solution de

$(S)$ , alors d'après la dernière ligne,  $z = 2$ , puis la 2e ligne donne  $y = -2 - z = -4$ , et enfin la première ligne donne  $x = 2 - z - y = 2 - 2 + 4 = 4$ . Ce raisonnement fournit en fait une équivalence (d'où la définition ci-dessous) et on en tire que l'unique solution de  $(S)$  est  $(4, -4, 2)$ .

**Exemple 25.** On a déjà vu que  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$  n'a pas de solutions, il n'est donc pas de Cramer.

**Exemple 26.** Le système à une équation et deux inconnues donné par  $x + y = 0$  admet une infinité de solutions. Son ensemble de solutions est

$$\{(-y, y) | y \in \mathbb{R}\}.$$

Ce système n'est donc pas de Cramer.

## II. Systèmes triangulaires, systèmes de Cramer

Pour commencer, apprenons à résoudre les systèmes triangulaires de Cramer.

### 1. Systèmes triangulaires

**Définition 27.** On dit qu'un système linéaire carré est *triangulaire* s'il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Autrement dit, un système carré de coefficients  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  est dit triangulaire si  $a_{i,j} = 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i > j$ .

**Définition 28.** Considérons un système linéaire carré à  $n$  équations, de coefficients  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ . Alors, les coefficients  $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$  sont appelés les coefficients diagonaux de ce système.

**Remarque.** Les coefficients diagonaux peuvent être nuls.

**Exemple 29.**  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 1 \\ 4z = 0 \end{cases}$  est un système triangulaire. Ses coefficients diagonaux sont 2, 0 et 4.

**Exemple 30.**  $\begin{cases} 2x + y + t = 2 \\ z + t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$  n'est pas un système carré, donc n'est pas triangulaire.

**Exemple 31.**  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ 4z = 0 \end{cases}$  est un système triangulaire de coefficients diagonaux 2, 3 et 4.

## 2. Systèmes triangulaires de Cramer : résolution

Voici pourquoi la notion de système carré triangulaire est très importante :

**Théorème 32.** *Un système linéaire triangulaire est de Cramer si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.*

**Démonstration.** Admise, découle de la technique expliquée ci-dessous.  $\square$

**Remarque.** Nous n’allons pas écrire de démonstration formelle, mais plutôt voir la technique «de la remontée» qui nous permet d’obtenir cette unique solution.

### Méthode de résolution des systèmes triangulaires de Cramer.

Considérons un système linéaire triangulaire (donc carré) à coefficients diagonaux tous non nuls. Il s’écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & a_{2,2}x_2 + & \dots & \dots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2 + & \dots & \dots + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & a_{3,3}x_3 + & \dots + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ & & & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

où les coefficients triangulaires  $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$  sont tous non nuls. Pour déterminer l’unique solution (conformément au théorème précédent) de ce système :

- (i) On commence par utiliser la dernière ligne :  $a_{n,n} \neq 0$  permet d’écrire  $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$ , ce qui détermine de manière unique la dernière coordonnée d’une solution  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- (ii) On injecte cette valeur de  $x_n$  dans l’égalité  $a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n$ , obtenue à partir de la ligne  $(L_{n-1})$ . En divisant par  $a_{n-1,n-1}$ , qui est non nul, on obtient l’unique valeur possible de  $x_{n-1}$  pour une solution  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- (iii) On réitère le processus, ce qui donne, de proche en proche, toutes les coordonnées de la solution.
- (iv) Cet algorithme donne lieu à une équivalence, il est donc inutile de vérifier que la solution trouvée marche.

A la fin, on a trouvé notre unique solution. Chaque étape a été permise par le fait que le coefficient diagonal correspondant était non nul.

**Remarque.** Cette méthode est assez simple, mais doit être bien comprise, car elle apparaît systématiquement quand on cherche à résoudre un système qui n’est pas incompatible.

**Exemple 33.**  $(S) : \begin{cases} 2x + y & = 2 \\ 3y + z & = 1 \\ 4z & = 0 \end{cases}$  est triangulaire à coefficients diagonaux non nul, donc est de Cramer. Pour trouver ses solutions, on écrit :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x & = 2 - y \\ 3y & = 1 - z \\ z & = \frac{0}{4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{2-y}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6} \\ y & = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3} \\ z & = 0 \end{cases}$$

Donc l’unique solution de ce système est  $(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 0)$ .

**Exemple 34.** Résolvons un système linéaire triangulaire.

Cette méthode permet de résoudre une classe plus grande de systèmes linéaires : les systèmes dits échelonnés.

### III. Systèmes linéaires échelonnés

#### Attention

A partir de maintenant, on prendra soin d'écrire les systèmes linéaires en mettant les inconnues systématiquement dans le même ordre car l'ordre des inconnues est important pour décrire la démarche. Ainsi,  $x_1$  sera, ci-dessous, la première inconnue,  $x_2$  la 2e, etc. On parlera de l'indice d'une inconnue : l'indice de  $x_i$  est l'entier  $i$ . De plus, on écrira les systèmes "bien en colonnes", c'est-à-dire qu'on respectera un alignement vertical pour une même inconnue présente dans plusieurs lignes. De même, attention à bien mettre le second membre à droite du signe  $=$ . Par exemple, le système linéaire donné par

$$\begin{cases} 2x_3 + x_1 + 3 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

devra être **immédiatement** réécrit sous la forme

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

#### 1. Définition

**Définition 35.** Un système linéaire est dit échelonné si l'indice de la première des inconnues ayant un coefficient non nul est strictement croissant d'une ligne à l'autre. Autrement dit, un système est échelonné quand la première inconnue ayant un coefficient non-nul dans une ligne a un coefficient nul dans la suivante.

**Exemple 36.** 
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ 4z = 0 \end{cases}$$
 est échelonné : en première ligne, la première des inconnues ayant un coefficient non nul est d'indice 1 (c'est  $x$ ), en 2e ligne, l'indice est 2 (c'est  $y$ ), et en dernière ligne, l'indice est 3.

**Exemple 37.** 
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 1 \\ 4z = 0 \end{cases}$$
 n'est pas échelonné, car en 2e ligne et en 3e ligne, la première inconnue avec un coefficient non nul est la même, c'est  $z$  d'indice 3.

**Exemple 38.** 
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 1 \\ 0 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
 est considéré échelonné. Les dernières lignes, sans inconnues, sont appelées lignes de compatibilité.

**Exemple 39.** 
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 1 \\ 0 = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$
 n'est pas échelonné : quand on a une ligne de compatibilité, les lignes suivantes doivent rester des lignes de compatibilité dans un système échelonné.

Par contre, le système équivalent suivant est échelonné :

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 1 \\ t = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

**Exemple 40.** 
$$\begin{cases} 2x + y + t = 2 \\ z + t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$
 est un système échelonné.

## 2. Résolution d'un système échelonné

On va distinguer deux types d'inconnues dans les systèmes échelonnés.

**Définition 41.** Dans un système linéaire échelonné, les premières inconnues de chaque lignes sont appelées les inconnues principales. Les autres inconnues sont appelées inconnues paramétriques.

**Exemple 42.** Le système échelonné 
$$\begin{cases} 2x + y & = 2 \\ 3y + z & = 1 \\ 4z & = 0 \end{cases}$$
 admet  $x, y$  et  $z$  pour inconnues principales et n'a pas d'inconnues paramétriques.

**Exemple 43.** Le système échelonné 
$$\begin{cases} 2x + y + t & = 2 \\ z + t & = 1 \\ t & = 2 \end{cases}$$
 admet  $x, z$  et  $t$  comme inconnues principales, et  $y$  comme inconnue paramétrique.

**Exemple 44.** Le système échelonné 
$$\begin{cases} x + y + t & = 0 \\ -z + t & = 2 \end{cases}$$
 admet  $x$  et  $z$  comme inconnues principales, et  $y$  et  $t$  comme inconnues paramétriques.

**Définition 45.** Dans un système linéaire, on appelle ligne de compatibilité toute ligne de la forme  $0 = b$ , où  $b$  est le second membre de la ligne correspondante.

La méthode ci-dessous permet de montrer la proposition suivante ("admise").

**Proposition 46.** Un système linéaire échelonné est incompatible si et seulement s'il admet une ligne de compatibilité de la forme  $0 = b$ , avec  $b \in \mathbb{R}^*$ .

### Méthode de résolution des systèmes échelonnés.

Pour résoudre un système linéaire échelonné ( $S$ ):

- (i) Si le système admet des lignes de compatibilité, c'est-à-dire des lignes de la forme  $0 = b, b \in \mathbb{R}$ :
  - (a) Si l'un des seconds membres de ces ligne est non-nul, alors le système est incompatible.
  - (b) Sinon, tous les second membres de ces lignes de compatibilité sont nuls, et le système est équivalent au système obtenu en enlevant ces lignes, ce qui nous mène au cas suivant.
- (ii) Sinon, le système est compatible. Alors, on modifie le système ( $S$ ) ainsi :
  - (a) On fait passer, dans chaque ligne, toutes les inconnues paramétriques à droite du signe égal,
  - (b) On résout le système obtenu en ne gardant, en inconnues, que les inconnues principales, et en manipulant les inconnues paramétriques comme des seconds membres. Ce nouveau système est un système triangulaire de Cramer, et on peut utiliser la méthode « de la remontée ».
- (iii) À la fin de cette résolution, les inconnues principales sont exprimées en fonction des inconnues paramétriques. Cela permet de décrire, en extension, l'ensemble des solutions du système ( $S$ ), en faisant varier les inconnues paramétriques dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 47.** Le système échelonné 
$$\begin{cases} 2x + y & = 2 \\ z & = 1 \\ 0 & = 2 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$
 a une ligne de compatibilité avec un second membre non nul : il est incompatible, son ensemble de solutions est vide.

**Exemple 48.** Le système linéaire ( $S$ ) : 
$$\begin{cases} 2x + y & = 2 \\ z & = 1 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$
 admet comme unique ligne de compatibilité, la ligne  $0 = 0$ . Ce système linéaire étant échelonné, il n'est donc pas incompatible. Il est équivalent



au système:

$$(S') : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Pour résoudre  $(S')$ , d'inconnues principales  $x$  et  $z$ , on applique la méthode de la remontée à  $(S')$  sous la forme

$$\begin{cases} 2x = 2 - y \\ z = 1 \end{cases}$$

Il vient  $\begin{cases} x = \frac{2-y}{2} = 1 - \frac{y}{2} \\ z = 1 \end{cases}$  et l'ensemble des solutions de  $(S)$  est alors  $\{(1 - \frac{y}{2}, y, 1) | y \in \mathbb{R}\}$ .

**Exemple 49.** Le système échelonné  $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -z + t = 2 \end{cases}$  n'a pas de lignes de compatibilité, et n'est donc pas incompatible. Ses inconnues principales sont  $x$  et  $z$ , donc on va appliquer la méthode de la remontée au système

$$\begin{cases} x + z = -t - y \\ -z = 2 - t \end{cases}$$

Il vient  $\begin{cases} x = -t - y - z \\ z = t - 2 \end{cases}$  qui donne  $\begin{cases} x = -t - y - (t - 2) = 2 - 2t - y \\ z = t - 2 \end{cases}$ .

Donc l'ensemble de ses solutions est  $\{(2 - 2t - y, y, t - 2, t) | y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$ .

## IV. L'algorithme du Pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss permet de donner un système échelonné équivalent à un système donné. Il repose sur 3 opérations élémentaires bien utilisées, qui donnent toujours un système équivalent.

### 1. Le théorème des opérations élémentaires

**Théorème 50.** Soit  $(S)$  un système linéaire à  $p$  équations (où  $p \in \mathbb{N}^*$ ). Soient  $(L_1), \dots, (L_p)$  les lignes de  $(S)$ . Alors, chacune des opérations ci-dessous, appelées opérations élémentaires, donnent un système équivalent à  $(S)$ .

(i) Échanger deux lignes  $(L_i)$  et  $(L_j)$  (pour  $i$  et  $j$  éléments de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ). Cette opération élémentaire est notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ .

(ii) Multiplier une ligne  $(L_i)$  par un réel  $\lambda$  **non nul**. Cette opération est notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ .

(iii) Ajouter à une ligne  $(L_i)$  un multiple quelconque  $\mu \times (L_j)$  d'une autre ligne  $(L_j)$ , pour  $\mu \in \mathbb{R}$ . Pour cette opération, il faut avoir  $i \neq j$ . Elle est notée  $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ .

En combinant les opérations (ii) et (iii), on obtient, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\lambda \neq 0$  et pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , l'opération:

(iv) Multiplier une ligne  $(L_i)$  par un réel  $\lambda$  **non nul**, et lui ajouter un multiple  $\mu \times (L_j)$  d'une autre ligne, notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ .

**Démonstration.** Nous n'écrirons pas la démonstration formelle. Explications à noter.  $\square$

**Exemple 51.** On peut écrire, à l'aide de ce théorème :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x + y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x + y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ -y + 2z = -1 \end{cases} \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2} \begin{cases} x + y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ 7z = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système obtenu est équivalent : il a le même ensemble de solutions. Il est échelonné, donc on sait le résoudre en utilisant la partie précédente.

**Remarque.** On notera, à chaque étape, les opérations élémentaires employées. On peut le faire au bout des lignes concernées, ou au dessus du symbole équivalent.

**Remarque. Attention à bien respecter** les contraintes du théorème : on ne multiplie pas une ligne par 0, et on n'ajoute pas à une ligne un multiple d'elle-même.

**Remarque.** Quand vous faites une opération du type (iii) ou (iv), factorisez directement vos calculs par rapport à chaque inconnue. Par exemple, dans la 2e étape du calcul ci-dessus, j'aurais pu rajouter l'étape détaillée :

$$\begin{cases} x+ & y+ & & = 2 \\ & 3y+ & z & = 1 \\ 2x+ & y+ & 2z & = 3 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x+ & & & = 2 \\ & 3y+ & z & = 1 \\ (2-2 \times 1)x+ & (1-2 \times 1)y+ & (2-2 \times 0)z & = 3-2 \times 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+ & y+ & & = 2 \\ & 3y+ & z & = 1 \\ & -y+ & 2z & = -1 \end{cases}$$

mais **hors de question** de présenter le calcul autrement.

Attention aussi à ne pas oublier de faire les opérations sur les seconds membres!

Ce théorème permet d'utiliser successivement toutes ces opérations pour transformer tout système linéaire en un système échelonné grâce à :

## 2. L'algorithme du pivot de Gauss.

**Méthode : l'algorithme du pivot de Gauss**

La méthode est expliquée sur un exemple. Considérons le système linéaire (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x+ & 3y & z+ & 4t & = 0 \\ & 2y- & 2z+ & t & = 1 \\ x- & 3y+ & & 2t & = 3 \\ x+ & y+ & z- & t & = 2 \end{cases}$$

Pour trouver un système linéaire échelonné équivalent à (S), on suit les étapes suivantes :

- (i) On cherche une ligne dans laquelle le coefficient en la première inconnue  $x$  est non nul. Si la première inconnue ne figure pas, on procède de même avec l'inconnue suivante. Ici, on décide de prendre la 3e ligne, car les étapes d'après sont plus simples si le coefficient en  $x$  est simple.

On utilise alors l'opération de permutation des lignes pour mettre la ligne choisie en première ligne.

$$(S) \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x- & 3y+ & & 2t & = 3 \\ & 2y- & 2z+ & t & = 1 \\ 2x+ & 3y+ & z+ & 4t & = 0 \\ x+ & y+ & z- & t & = 2 \end{cases}$$

- (ii) On utilise la ligne 1 et les autres opérations élémentaires pour éliminer la première inconnue de toutes les autres lignes. On dira qu'on « pivote » sur ce coefficient 1 de  $x$  en première ligne.

$$\begin{cases} x- & 3y+ & & 2t & = 3 \\ & 2y- & 2z+ & t & = 1 \\ 2x+ & 3y+ & z+ & 4t & = 0 \\ x+ & y+ & z- & t & = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x+ & (-3)y & + & 2t & = 3 \\ & 2y- & 2z+ & t & = 1 \\ (2-2)x+ & (3+6)y+ & z+ & (4-4)t & = 0-6 \\ (1-1)x+ & (1+3)y+ & z+ & (-1-2)t & = 2-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x- & 3y+ & & 2t & = 3 \\ & 2y- & 2z+ & t & = 1 \\ & 9y+ & z & & = -6 \\ & 4y+ & z+ & (-3)t & = -1 \end{cases}$$

(iii) Maintenant que tous les coefficients en la première inconnue considérée sont nuls sauf en première ligne, on recommence le processus, avec l'inconnue suivante, en ne considérant que les lignes suivantes. La première ligne ne sera plus modifiée.

Ici, on va donc pivoter sur le coefficient 2 de  $y$  en ligne 2 (c'est la première ligne qui n'est pas encore fixée, elle a un coefficient non nul en  $y$  : on peut s'en servir pour pivoter).

On a ici un peu de liberté. Par exemple, préférant travailler avec des coefficients entiers, on effectue  $L_3 \leftarrow 2L_3 - 9L_2$ , mais on aurait aussi pu effectuer  $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9}{2}L_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x- \quad 3y+ \quad \quad 2t \quad = 3 \\ \quad 2y- \quad 2z+ \quad t \quad = 1 \\ \quad \quad 9y+ \quad z \quad \quad = -6 \\ \quad \quad 4y+ \quad z+ \quad (-3)t = -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 - 9L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ \iff \\ \iff \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x- \quad 3y+ \quad \quad 2t \quad = 3 \\ \quad 2y- \quad 2z+ \quad t \quad = 1 \\ \quad \quad 20z+ \quad (-9)t = -21 \\ \quad \quad 5z+ \quad (-5)t = -3 \end{array} \right.$$

(iv) Et on réitère, tant qu'on n'a pas fini. On a fini d'annuler les coefficients en  $y$  des lignes 3 et 4. On va maintenant pivoter pour ne garder du  $z$  que dans une ligne. Je choisis de pivoter sur le coefficient 5 en  $z$  de la dernière ligne.

$$\left\{ \begin{array}{l} x- \quad 3y+ \quad \quad 2t \quad = 3 \\ \quad 2y- \quad 2z+ \quad t \quad = 1 \\ \quad \quad 20z+ \quad (-9)t = -21 \\ \quad \quad 5z+ \quad (-5)t = -3 \end{array} \right. \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_4 \\ \iff \\ \iff \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x- \quad 3y+ \quad \quad 2t \quad = 3 \\ \quad 2y- \quad 2z+ \quad t \quad = 1 \\ \quad \quad 5z+ \quad (-5)t = -3 \\ \quad \quad 20z+ \quad (-9)t = -21 \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \\ \iff \\ \iff \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x- \quad 3y+ \quad \quad 2t \quad = 3 \\ \quad 2y- \quad 2z+ \quad t \quad = 1 \\ \quad \quad 5z+ \quad (-5)t = -3 \\ \quad \quad 11t \quad = -9 \end{array} \right.$$

(v) Et voilà ! On a obtenu un système échelonné. On peut le résoudre à l'aide de la partie précédente. Ici, on reconnaît un système carré triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, il est donc de Cramer et a une unique solution.

**Exemple 52.** Résolvons quelques systèmes linéaires.

## V. Un exemple de système linéaire à paramètre

Un système linéaire à paramètre est un système linéaire dont certains coefficients ou seconds membres comportent une variable. Dans ce cas, l'ensemble des solutions dépend de la variable, et il se peut que le système ait une résolution différente pour certaines valeurs de la variable, forçant alors une disjonction des cas.

**Exemple :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Résolvons le système linéaire suivant, en fonction de  $\lambda$  :

$$(S) : \begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases} .$$

On utilise le pivot de Gauss, et si besoin, on procède par disjonction des cas. Il faut faire attention lors des opérations élémentaires et du pivot : on ne peut pivoter sur  $\lambda$  sans supposer  $\lambda \neq 0$ , par exemple. Donc pour repousser la disjonction des cas, on évite.

$$(S) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + y + z = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ (\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1 - \lambda)y + (1 - \lambda^2)z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1 \end{cases}$$

Ici pour continuer à appliquer le pivot, on pourrait être forcé de faire une disjonction des cas (si  $\lambda - 1 = 0$ , on ne peut pas pivoter en  $y$  dans tous les cas). Mais heureusement, ici, indépendamment de  $\lambda$ , on peut rendre notre système triangulaire carré avec  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ .

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ (\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0 \\ (1 - \lambda)y + (1 - \lambda^2)z = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ (\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0 \\ (-\lambda^2 - \lambda + 2)z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Ainsi, le système  $(S)$  est de Cramer si et seulement si  $\lambda - 1 \neq 0$  et  $-\lambda^2 - \lambda + 2 \neq 0$ . Or,  $-\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)$  donc on distinguera 3 cas :

**1e cas :** Si  $\lambda \notin \{1, -2\}$ , alors on a un système triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Ce système est donc de Cramer. Étant homogène il admet  $0_{\mathbb{R}^3}$  comme solution :

L'unique solution de ce système est  $(0, 0, 0)$  si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ .

**2e cas :** si  $\lambda = 1$ , alors  $(S)$  est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il est équivalent à sa première ligne,  $x$  est l'inconnue principale donc

Si  $\lambda = 1$ , l'ensemble des solutions de ce système est  $\{(-y - z, y, z) \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

**3e cas :** Sinon,  $\lambda = -2$ . Le système obtenu est alors

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y + 2z = -z + 2z = z \\ y = z \end{cases}$$

et on a donc :

L'ensemble des solutions est donc  $\{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$  si  $\lambda = -2$ .

## VI. Plus sur les systèmes linéaires homogènes

### 1. Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

Cette section est un avant gout de l'algèbre linéaire, un peu comme le petit paragraphe que nous avons écrits sur la terminologie « suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ».

**Définition 53.** Soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^n$ .

- On appelle somme de  $x$  et  $y$  le  $n$ -uplet noté  $x + y$  et donné par

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La multiplication du  $n$ -uplet  $x$  par le scalaire  $\lambda$  est le  $n$ -uplet noté  $\lambda \cdot x$  donné par :

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

- On appelle combinaison linéaire de  $x$  et  $y$  tout élément de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels.

Ces définitions sont à la base de l'algèbre linéaire, et interviennent ici :

**Proposition 54.** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\mathbb{R}^n$  et  $(S)$  un système linéaire homogène. Si  $x$  et  $y$  sont solutions de  $(S)$ , alors pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$  est aussi solution de  $(S)$ .

On dira que l'ensemble des solutions de  $(S)$  est stable par combinaisons linéaires : toute combinaison linéaire de solutions des  $(S)$  est solution de  $(S)$ .

**Démonstration.** A noter.  $\square$

**Exemple 55.** Considérons le système linéaire homogène  $(S) : \begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$ .

(i) Déterminons l'ensemble  $E$  des solutions de  $(S)$ , avec la méthode du Pivot de Gauss.

(ii) Vérifions la proposition ci-dessus, en utilisant la description obtenue de  $E$ .

Finalement, soit  $(S)$  est un système linéaire homogène (à  $n$  inconnues) dont on note  $E$  l'ensemble des solutions. On a vu les deux propriétés suivantes sur  $E$  :

- $0_{\mathbb{R}^n} \in E$  (le  $n$  uplet nul est solution de  $(S)$  ),
- $E$  est stable par combinaisons linéaires : si  $x$  et  $y$  sont des solutions de  $(S)$ , alors  $\lambda x + \mu y$  est solution de  $(S)$  pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ .

On dira, pour résumer ces propriétés, que l'ensemble  $E$  est *un sous-espace vectoriel* de  $\mathbb{R}^n$ . Pour expliquer cette terminologie, on peut dire que :

- L'adjectif "vectoriel" signifie qu'on s'intéresse aux calculs des combinaisons linéaires,
- $E$  est un sous-espace vectoriel signifie qu'on peut faire des calculs vectoriels au sein de l'ensemble  $E$ .

## 2. Système linéaire homogène associée à un système linéaire

**Définition 56.** Soit  $(S)$  un système linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Alors, on appelle système linéaire homogène associé à  $(S)$  le système linéaire homogène  $(S_h)$  :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

obtenu en remplaçant tous les seconds membres par 0.

La suite est **Hors programme** pour le moment. Cette proposition justifie cette histoire de système linéaire homogène associé. On ne s'en servira pas dans ce chapitre, uniquement dans des chapitres plus théoriques ultérieurs, mais on peut déjà commencer à en parler.

Si vous comprenez cela, vous aurez une avance significative pour le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

**Proposition 57.** Soit  $(S)$  un système linéaire à  $n$  inconnues et  $(S_h)$  son système linéaire homogène associé. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $x$  est solution de  $(S)$ .
- (ii) Pour toute solution  $y$  de  $(S_h)$ ,  $x + y$  est solution de  $(S)$ .

On peut même aller plus loin :

**Proposition 58.** Soit  $S$  un système linéaire, et  $(S_h)$  le système linéaire homogène associé à  $(S)$ . Notons  $\mathcal{S}(S)$  les solutions de  $(S)$  et  $\mathcal{S}(S_h)$  les solutions de  $(S_h)$ . Supposons  $(S)$  non incompatible, et soit  $x_p$  une solution particulière de  $(S)$ . Alors :

$$\mathcal{S}(S) = \{x_p + x_h, x_h \in \mathcal{S}(S_h)\}$$

Autrement dit, résoudre  $(S)$  revient à trouver une solution de  $(S)$  et à résoudre  $(S_h)$ .