

Programme de colle n° 7 : Polynômes, chapitre complet

Semaine du lundi 11 novembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Voir le programme précédent

7.1 Généralités sur les fonctions polynomiales, identification et unicité des coefficients.

7.2 Étude des polynômes du second degré.

Arithmétique des polynômes et racines

7.3 Somme, produit de polynômes. Multiplication d'un polynôme par un réel. Terme de plus haut degré et coefficient constant d'un produit de polynômes. Un produit de polynômes est le polynôme nul si et seulement si l'un de ces polynômes est le polynôme nul.

7.4 Opérations et degré : degré d'une somme, d'un produit de polynômes. Degré du polynôme λP en fonction du réel λ . Degré du polynôme dérivé.

7.5 Le théorème (admis) de la division euclidienne pour les polynômes, et son algorithme. Divisibilité entre polynômes. Pour tous polynômes A et B tels que $B \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, $B|A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

7.6 Soit P un polynôme et r un réel, alors r est racine de P si et seulement si $X - r|P$. Utilisation pour factoriser des polynômes dont une racine est connue. Généralisations : si a_1, \dots, a_p sont des réels distincts, alors ce sont des racines de

P si et seulement si $\prod_{k=1}^p (X - a_k)|P$.

7.7 Factorisation d'un polynôme de degré n admettant n racines distinctes. Tout polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ admettant au moins $n + 1$ racines est nul. Si deux polynômes de degré au plus n coïncident en $n + 1$ points, alors ils sont égaux. Si deux polynômes coïncident en une infinité de points, alors ils sont égaux.

Python : listes

7.8 Toutes les commandes usuelles sur les listes ont été vues : longueur d'une liste, i ième élément d'une liste, modification d'une entrée, ajout d'un élément en fin de liste, suppression d'une entrée, test d'appartenance, nombre d'occurrences d'un élément dans une liste, définition de sous-listes, copie indépendante de liste, concaténation, définition de listes en compréhension.

Quelques questions de cours

Les élèves devront tous effectuer une division euclidienne pendant la colle de cette semaine et de la semaine prochaine (partie cours ou premier exercice).

1. Énoncer et démontrer la "règle du produit nul" (prop. 29) pour les polynômes.
2. Énoncer et démontrer la proposition relative au degré d'une somme de polynômes.
3. Énoncer les propositions relatives aux degrés d'un produit de polynômes et du polynôme dérivé. Démontrer celle portant sur le polynôme dérivé.
4. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes, et poser la division euclidienne suivante (au choix de l'interrogation).
5. Énoncer et démontrer la proposition (44) relative au lien entre la division euclidienne de polynômes et la relation de divisibilité.
6. Énoncer et démontrer la proposition (45) liant la notion de racine d'un polynôme à la notion de divisibilité.
7. Énoncer la proposition (48) donnant une condition équivalente à l'énoncé " a_1, \dots, a_p sont racines de P ", où a_1, \dots, a_p sont p réels deux à deux distincts (où $p \in \mathbb{N}^*$) et où $P \in \mathbb{R}[X]$. L'utiliser pour factoriser complètement le polynôme $X^4 - 5X^3 + 5X^2 + 5X - 6$.
8. Énoncer et démontrer la proposition donnant la factorisation d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines (deux à deux) distinctes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n + 1$ racines distinctes. Que dire de P ? Le démontrer.

10. Écrire le code d'une fonction Python `testConstante` prenant en entrée une liste `L` et renvoyant en sortie `True` si `L` est vide ou constante (i.e, si toutes ses entrées sont égales), et `False` sinon.